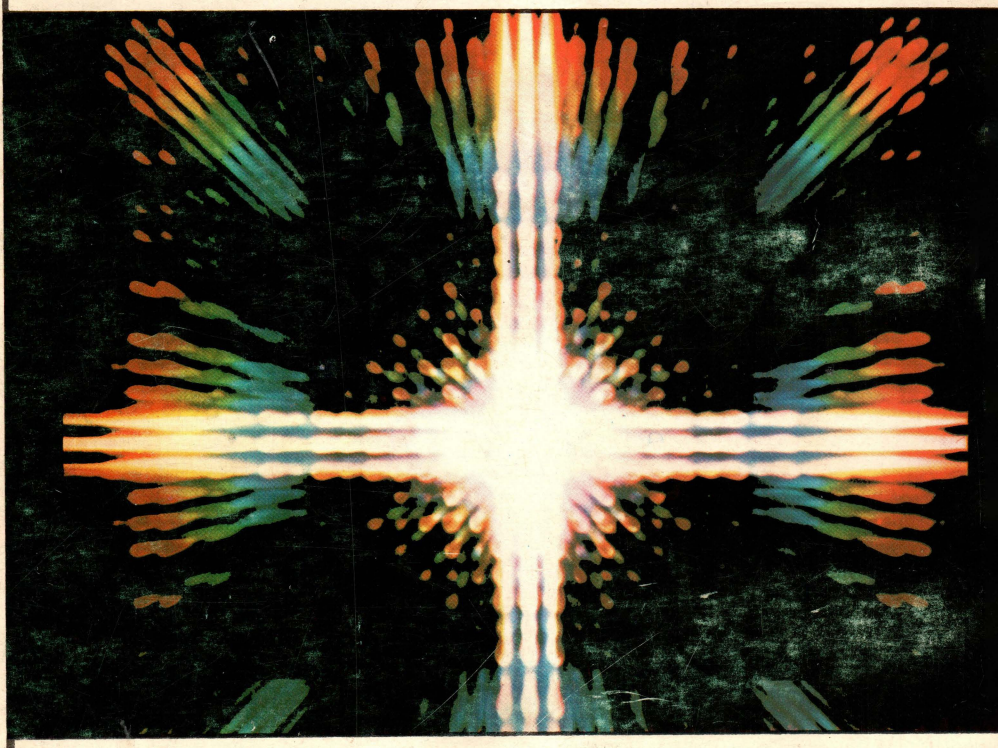
علوی

ریاضیات کنکور فنی و ریاضی

جبر و آنالیز ـ حساب مثلثات



مؤلفان

مهندس عبدالله پاکزاد سرابی ـ علی اکبر جعفری

علی حسن زاده ماکویی ـ غلامعلی هدایتی مقدم ـ سید محمود وزیرنیا

دکتر سید علی موسوی ـ احمد فیروزنیا ـ خسرو محمدی

احمد رضا یاوری

ویراستار: دکتر نوروز ایزد دوستدار

جبر و آنالیز ـ حساب مثلثات

مؤلفان

مهندس عبدالله پاکزاد سرابی ـ علی اکبر جعفری

علی حسن زاده ماکویی ـ غلامعلی هدایتی مقدم ـ سید محمود وزیرنیا

دکتر سید علی موسوی ـ احمد فیروزنیا ـ خسرو محمدی

احمد رضا یاوری

از سری کتاب های سازمان آموزشی و انتشاراتی علوی

نام ..... مجموعه جبر، حساب و مثلثات

مؤلفان ..... مهندس عبدالله پاکزاد سرابی، احمد فیروزنیا خسرو محمدی
دکتر سیدعلی موسوی، سیدمحمود وزیرنیا، علی اکبر جعفری،
علی حسن زاده ماکوئی

تعداد صفحات ..... ۴۲۹ صفحه

چاپخانه ..... کسری

تاریخ چاپ ..... پائیز ۷۱

نوبت چاپ ..... سوم

تیراژ ۵۰۰۰

عنوان	صفحه
قدر مطلق	۱
حل معادلات شامل قدر مطلق	۲
تبدیل یک رادیکال مرکب به مجموع رادیکالهای ساده	۸
دو جمله‌ای نیوتن	۹
روابط بین ضریبها و ریشه‌ها	۱۰
بخش پذیری	۱۱
تابع	۱۴
حد تابع	۲۷
بینهایت کوچک	۳۳
بینهایت بزرگ	۳۸
مشتق	۴۱
مشتق بعضی از تابعهای غیر جبری	۴۵
پوش منحنی	۴۷
ماکزیمم و مینیمم بعضی از تابعها	**۴۹**
ماکزیمم و مینیمم بعضی از عبارتها	۵۰
تقارن	۵۶
چند نکته در مورد مرکز تقارن	۵۷
تقارن منحنی‌های مثلثاتی	۶۷
مجانب	۶۹
مقطعهای مخروطی	**۷۷**
تعیین نزدیکترین و دورترین فاصله یک منحنی از مبداء مختصات	**۸۲**
تابعهای متناوب	۸۴
مکان هندسی	۸۸
پرسشهای تستی جبر و آنالیز	**۱۰۳**
جواب پرسشهای جبروآنالیز	**۱۶۷**
مثلثات	**۲۲۲**
۱۰۱ ــ موضوع مثلثات	۲۲۲
مسایل	۲۲۴

عنوان	صفحه

۱۰۲ ــ جهت مثلثاتی ۲۲۵
مسایل ۲۳۰
۱۰۳ ــ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۲۳۱
مسایل ۲۳۴
۱۰۴ ــ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۲۳۸
۱۰۵ ــ تابع های معکوس ۴۲۴
۱۰۶ ــ نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های $(a+b)$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های a و b ۲۴۵
مسایل ۲۵۴
۱۰۷ ــ تبدیل مجموع یا تفاضل دو نسبت مثلثاتی به حاصل ضرب ۲۵۹
۱۰۸ ــ معادله مثلثاتی ۲۶۱
۱۰۹ ــ روابط بین اجزای اصلی مثلث قائم‌الزاویه ۲۷۳
مسایل ۲۷۸
راهنمای مسایل ۲۸۳
سئوالات کنکور سال ۶۶ ــ ۶۵ ۳۱۰
راهنمای سئوالات ۶۶ ــ ۶۵ ۳۱۲
سئوالات کنکور سال ۶۷ ــ ۶۶ ۳۱۴
راهنمای سئوالات ۶۷ ــ ۶۶ ۳۱۶
حساب ۳۱۸
دنباله‌ها ۳۱۸
تصاعد حسابی (عددی) ۳۲۳
مسائل ۳۳۴
تستهای دنباله‌ها ــ تصاعد حسابی ۳۳۵
پاسخ تستهای دنباله‌ها ــ تصاعد حسابی ۳۴۱
تصاعد هندسی ۳۴۸
مسائل ۳۶۳
تستهای تصاعد هندسی ۳۶۴
پاسخ تستهای تصاعد هندسی ۳۷۰
تصاعد توافقی ۳۷۷
لگاریتم ۳۷۹

عنوان	صفحه
تمرینات	۳۹۶
تستهای لگاریتم	**۳۹۹**
پاسخ تستهای لگاریتم	**۴۰۹**

هیأت مؤلفان

مهندس عبدالله پاکزاد سرابی
احمد فیروزنیا
خسرو محمدی
دکتر سیدعلی موسوی
سیدمحمود وزیرنیا

ویراستار
دکتر نوروز ایزد دوستدار

A

قدر مطلق

تعریف: $|x|$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geqslant 0 \\ -x & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

مثال:

$$\left|+\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \quad , \quad |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} \quad ,$$

$$\left|-\frac{\sqrt{5}}{5}\right| = -\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad , \quad |3-\sqrt{10}| = -(3-\sqrt{10}) = \sqrt{10}-3$$

$$|1-\cos 2\alpha| = 1-\cos 2\alpha \qquad |\sin\beta - 1| = -(\sin\beta - 1) = 1-\sin\beta$$

توجه کنید :

$$\forall x \in R \ ; \ x \leqslant |x|$$

نتیجه:

I) $-|x+y| \leqslant |x|+|y|$

زیرا ، اگر $x+y \geqslant 0$ باشد ، دراین‌صورت $|x+y| = x+y$ و می‌توان نوشت :

$$x \leqslant |x| \ , y \leqslant |y| \Longrightarrow x+y \leqslant |x|+|y| \Longrightarrow |x+y| \leqslant |x|+|y|$$

اگر $x+y < 0$ باشد ،در این‌صورت $|x+y| = -(x+y)$ و می‌توان‌نوشت :

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leqslant |x|+|y|$$

توجه : هر جا اشاره به مطالب درسی شده است. مقصودمطالب‌مندرج در این کتاب است.

II) – $|x-y| \geqslant |x|-|y|$

اگرقرار دهیم ، $x-y=z$ یا $x=y+z$ نتیجه می‌شود :

$|x|=|y+z| \leqslant |y|+|z|$

یا $|x| \leqslant |y|+|x-y| \Longrightarrow |x-y| \geqslant |x|-|y|$

III) – $|x.y|=|x|.|y|$

IV) : $|\frac{x}{y}|=\frac{|x|}{|y|}$ $y \neq 0$

V) هرگاه a مثبت و $|x|<a$ باشد نتیجه می‌شود : $-a<x<a$

مثال : از $|x+3|<2$ نتیجه می‌شود :

$-5<x<-1$ و یا $-2<x+3<2$

به طریق زیر نیز می‌توان جواب نامعادله داده شده را بدست آورد :

$|x+3|<2 \Longrightarrow (x+3)^2<4 \Longrightarrow x^2+6x+5<0 \Longrightarrow -5<x<-1$

حل معادلات شامل قدر مطلق

I) بررسی جواب معادله $|x-a|+|x-b|=k$ ((بافرض $b>a$))

الف ــ اگر $k>b-a$ باشد معادله دو ریشه دارد .

ب ــ اگر $k=b-a$ باشد معادله ریشه‌های بیشمار دارد .

ج ــ اگر $k<b-a$ باشد معادله ریشه ندارد .

مثال (۱): $|x-3|+|x+4|=8$

دراین مثال : $b-a=4-(-3)=7$ بنابراین $k=8>7$ است و معادله دو جواب دارد .

حل :

جواب $(1)\ x \geqslant 3 \Longrightarrow x-3+x+4=8 \Longrightarrow x=\frac{7}{2}$

جواب $(2)\ x \leqslant -4 \Longrightarrow -(x-3)-(x+4)=8 \Longrightarrow x=-\frac{9}{2}$

نشدنی $(3)\ -4<x<3 \Longrightarrow -(x-3)+(x+4)=8 \Longrightarrow 0.x+7=8$

مثال (۲): $|x+2|+|x-3|=5$

دراین مثال: $b-a=2-(-3)=5$ بنابراین $k=b-a$ ومعادله جوابهای بیشمار دارد.

حل:

جواب $(1)\ |x|\geqslant 3 \Longrightarrow x+2+x-3=5 \Longrightarrow x=3$

جواب $(2)\ x\leqslant -2 \Longrightarrow -(x+2)-(x-3)=5 \Longrightarrow x=-2$

جوابهای بیشمار $(3)\ -2<x<3 \Longrightarrow x+2-x+3=5 \Longrightarrow 0.x=0$

مثال (۳): $|x-4|+|x-2|=1$

دراین مثال: $b-a=-2-(-4)=2$ و $k=1$ است. بنابراین $k<b-a$ و معادلـــه جواب ندارد.

حل:

قابل قبول نمی‌باشد $(1)\ x\geqslant 4 \longrightarrow x-4+x-2=1 \longrightarrow x=\frac{7}{2}$

قابل قبول نمی‌باشد $(2)\ x\leqslant 2 \longrightarrow -(x-4)-(x-2)=1 \longrightarrow x=\frac{5}{2}$

نشدنی $(3)\ 2<x<4 \longrightarrow -(x-4)+(x-2)=1 \longrightarrow 0.x=-1$

برای حل معادله‌هایی نظیر $|x-a|+|x-b|=k$ ،طبق تعریف قدر مطلق، به فرض این که $a<b$ است. این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
$x-a$	$-$	0	$+$		$+$
$x-b$	$-$		$-$	0	$+$

اگر $x>b$ باشد آنگاه داریم

$$x-a+x-b=k \Longrightarrow x=\frac{k+a+b}{2}$$

باتوجه به این که $x>b$ است پس: $\frac{k+a+b}{2}>b$ یا $k>b-a$

اگر $a<x<b$ باشد داریم:

$$(x-a)-(x-b)=k \Longrightarrow 0x+(b-a)=k$$

اگر $b-a=k$ باشد معادله‌جوابهای بیشمار دارد که همه بین a و b قراردارند.

اگر $b-a\neq k$ باشد معادله جواب ندارد.

اگر $x < a$ باشد آنگاه داریم :

$$-(x-a)-(x-b)=k \implies -2x=k-(b+a)$$

یا $x=\frac{b+a-k}{2}$ و باتوجه به $x<a$ باید $k>b-a$ باشد .

بنابراین به فرض $b>a$ نتیجه می‌گیریم :

اگر $K>b-a$ باشد معادله دوجواب‌دارد که یکی بزرگتر از b و دیگری کوچکتراز a است.

اگر $K=b-a$ باشد معادله جوابهای بی‌شمار دارد که همه بین a و b قرار دارند .

اگر $K<b-a$ باشد معادله جواب ندارد .

III) بررسی جواب معادله

$$|x-a|-|x-b|=k$$

یا $|x-b|-|x-a|=k$ (بافرض) $b>a$

الف ــ اگر $k<a-b$ یا $k>b-a$ ، معادله ریشه ندارد .

ب ــ اگر $a-b<k<b-a$ ، معادله یک ریشه دارد .

ج ــ اگر $k=b-a$ یا $k=a-b$ ، معادله ریشه‌های بیشمار دارد .

تبصره: برای حل هندسی معادلات I و II به صفحات ۲۱و۲۲ رجوع کنید .

بررسی چند معادلهٔ گنگ:

۱) $\sqrt{x-9}-\sqrt{x+11}=\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}$

طرف چپ برای مقادیر $x\geqslant 9$ و طرف راست برای مقادیر $3\leqslant x\leqslant 5$ معنی دار است . به این سبب معادله جواب ندارد .

۲) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[5]{x-2}+\sqrt{x-3}=0$

طرف چپ برای مقادیر $x\geqslant 3$ همواره مثبت است و اگر جوابی وجود داشته باشد باید بزرگتر یا مساوی 3 باشد . در نتیجه معادله جواب ندارد .

۳) $\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}=1$ چون مقدار زیر رادیکال دوم همواره بزرگتراز x است و درنتیجه طرف اول معادله منفی می‌باشد . لذا معادله جواب ندارد .

۴) $2+\sqrt{x-5}=0$ طرف اول همواره مقداری است مثبت درنتیجه معادله جواب ندارد.

استفاده از اتحادها در حل بعضی از معادله‌ها:

۱) اگر $a+b+c=0$ و $a^3+b^3+c^3=0$ باشد آنگاه داریم :

$a.b.c=0$

زیرا: $a+b=-c \Longrightarrow (a+b)^3=-c^3$

ویا $a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)=0$

$3ab(a+b)=0$

ویا $3ab(-c)=0 \Longrightarrow a.b.c=0$

۲) روش دوم:

صحت اتحاد

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

به‌سادگی تحقیق می‌شود. (تحقیق کنید)

با توجه به اتحاد فوق اگر $a+b+c=0$ آنگاه $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ و یا $a^3+b^3+c^3=3abc$.

مورد استعمال

مثال:

ریشه‌های معادلهٔ $(x-1)^3+8(2-x)^3+(x-3)^3=0$ را بدست آورید.

حل:

چون داریم: $\underbrace{x-1}_{a} + \underbrace{4-2x}_{b} + \underbrace{x-3}_{c}=0$

در نتیجه: $(x-1)(4-2x)(x-3)=0$

و عددهای $x=1$ ، $x=2$ ، $x=3$ ریشه‌های معادله میباشند.

حل معادله را می‌توان از اتحاد:

$$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3) \equiv 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

نیز نتیجه گرفت.

بررسی معادلهٔ درجه سوم: $x^3+Px+q=0$

۱) اگر در معادلهٔ $x^3+Px+q=0$ ، $4P^3+27q^2=0$ باشد ، مقدار ریشه‌ها از دستورهای زیر بدست می‌آیند:

(ریشه مضاعف) $x_1=x_2=-\frac{3q}{2P}$

و

$x_3=\frac{3q}{p}$ (ریشهٔ ساده)

II) ــ اگر در معادلهٔ $x^3+px+q=0$ به جای q قرینه‌اش $-q$ را قرار دهیم معادلهٔ $x^3+px-q=0$ حاصل می‌شود که هر یک از ریشه‌های آن قرینهٔ یک ریشهٔ معادلهٔ اول است .

III) ــ اگر در معادلهٔ $x^3+px+q=0$ رابطهٔ $q^2+p+1=0$ برقرار باشد ($p<0$ است) یکی از ریشه‌های معادله $x=q$ است .

مثال:

$$x^3-4x+\sqrt{3}=0 \longrightarrow (\sqrt{3})^2-4+1=0 \Longrightarrow x=\sqrt{3}$$

IV) ــ برای آنکه دو ریشه از ریشه‌های معادلهٔ $x^3+px+q=0$ قرینه باشد لازم است $q=0$ باشد . در این صورت اگر $p<0$ باشد ، دو ریشهٔ حقیقی ، قرینه یکدیگر و اگر $p>0$ باشد ، دو ریشهٔ موهومی ، قرینه یکدیگرند .

V) ــ اگر درمعادلهٔ درجهٔ‌سوم $x^3+px+q=0$ نامساوی $4p^3+27q^2>0$ برقرار باشد معادله یک ریشهٔ حقیقی دارد و برای یافتن آن قرار می‌دهیم $x=u+v$ و در معادلهٔ حاصل ، ضریب $u+v$ را برابر صفر می‌گذاریم . از دو معادلهٔ دو مجهولی حاصل u^3 و v^3 را به دست می‌آوریم . در نتیجه ریشهٔ معادله از دستور

$$x=\sqrt{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$ (دستور کاردان)

به دست می‌آید .

VI) ــ اگر در معادلهٔ $x^3+px+q=0$ نامساوی $4p^3+27q^2<0$ برقرار باشد . معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد که آنها را به روش مثلثاتی می‌توان محاسبه کرد.

VII) ــ معادلهٔ درجهٔ سوم : $y^3+by^2+cy+d=0$ باتعویض متغیر $y=x-\frac{b}{3}$ به معادلهٔ‌درجهٔ‌سوم‌ناقص به شکل : $x^3+px+q=0$ تبدیل می‌شود .

بررسی جواب بعضی معادله‌های درجهٔ *n* ام

هرگاه در معادلهٔ $ax^n+bx^{n-1}+\dots+k=0$ n زوج و $\frac{k}{a}<0$ باشد

معادله، حداقل دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامه دارد.

مثال:

معادلهٔ $4x^4+8x^3+3x^2-2x-1$ حداقل دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد.

گویا کردن مخرج های گنگ:

(۱) برای گویا کردن مخرج کسرهایی که بصورت $\frac{A}{\sqrt[m]{B^n}}$ ، $m>n$ هستند، کافی است صورت و مخرج را در $\sqrt[m]{B^{m-n}}$ ضرب‌کنیم، داریم:

$$\frac{A}{\sqrt[m]{B^n}}=\frac{A\sqrt[m]{B^{m-n}}}{\sqrt[m]{B^n}\,\sqrt[m]{B^{m-n}}}=\frac{A\sqrt[m]{B^{m-n}}}{B}$$

مثال:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{16}}=\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{2\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{4}$$

(۲) برای گویا کردن مخرج کسرهایی به صورت $\frac{A}{\sqrt[3]{B}\pm\sqrt[3]{C}}$ با استفاده ازاتحاد:

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

صورت و مخرج کسر را در $(\sqrt[3]{B^2}\mp\sqrt[3]{BC}+\sqrt[3]{C^2})$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{B}\pm\sqrt[3]{C}}=\frac{A(\sqrt[3]{B^2}\mp\sqrt[3]{B.C}+\sqrt[3]{C^2})}{(\sqrt[3]{B}\pm\sqrt[3]{C})(\sqrt[3]{B^2}\mp\sqrt[3]{BC}+\sqrt[3]{C^2})}=$$

$$\frac{A(\sqrt[3]{B^2}\mp\sqrt[3]{BC}+\sqrt[3]{C^2})}{B\pm C}$$

مثال:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}=\frac{2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}{2-1}=$$

$$2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)$$

(۳) برای گویا کردن مخرج کسرهایی به صورت :

$$\frac{A}{\sqrt[4]{B} \pm \sqrt[4]{C}}$$

ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم و پس ازساده کردن بار دیگر صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرجش ضرب می‌کنیم .

مثال:

$$\frac{5}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}} = \frac{5(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})}{(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})} = \frac{5(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$$

$$\frac{5(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{5(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$$

(۴) به طور کلی برای گویا کردن مخرج‌هایی به صورت $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ با استفاده از اتحاد $A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+B^{n-1})$ صورت‌ومخرج کسر را در چند جمله‌ای

$$(\sqrt[n]{a})^{n-1}+(\sqrt[n]{a})^{n-2}\sqrt[n]{b}+(\sqrt[n]{a})^{n-3}(\sqrt[n]{b})^2+\cdots+(\sqrt[n]{b})^{n-1}$$

ضرب می‌کنیم و مخرج به صورت $a-b$ در می‌آید .

تبدیل یک رادیکال مرکب به مجموع رادیکالهای ساده

مقصود از تبدیل رادیکال مرکب $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ که درآن a و b دو مقدار گویا و مثبت‌هستند و b مجذور کامل نیست به مجموع رادیکالهای ساده تعیین‌دو مقدار گویای مثبت‌است مانند x و y بطوریکه :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

ویا $a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy} \longrightarrow 2\sqrt{xy}=(a-x-y)+\sqrt{b}$

ویا $4xy=(a-x-y)^2+b+2(a-x-y)\sqrt{b}$

رابطهٔ اخیر وقتی برقرار است که ضریب $\sqrt{b}$ برابر صفر باشد و بنابراین

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=\dfrac{b}{4} \end{cases} \Longrightarrow z^2-az+\frac{b}{4}=0$$

$$z'=x=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} \quad , \quad z''=y=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$$

و برای آنکه x و y گویا باشد، باید a^2-b مجذور کامل باشد و چون $x+y=a$ است پس باید: $a^2-b=c^2$ و $a>0$ باشد، و ثابت می‌شود که دو شرط بالا لازم و کافی می‌باشند و می‌توان نوشت:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

و به همین ترتیب:

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

مثال:

رادیکال مرکب $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ را به مجموع رادیکالهای ساده‌تبدیل کنید.

$$a=7>0 \quad , \quad a^2-b=49-48=1 \Longrightarrow c^2=1$$

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}+\sqrt{\frac{7-1}{2}}=2+\sqrt{3}$$

یادآوری: اگر $a>0$ و $a^2-b>0$ مجذور کامل نباشد بازهم دستورهای بالا برقرارند ولی طرفهای دوم مفصلتر و پیچیده‌تر از طرف اول می‌باشند.

دوجمله‌ای نیوتن

۱) بسط دوجمله‌ای نیوتن به صورت زیر است:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}.b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}.b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times$$
$$a^{n-3}.b^3+\cdots+nab^{n-1}+b^n$$

۲) تعداد جمله‌ها برابر $n+1$ است.

۳) مجموع ضریب‌ها برابر $(1+1)^n=2^n$ است که به‌ازای $a=b=1$ به‌دست می‌آید.

۴) مجموع نمای حرف a و نمای حرف b در هر جمله مقدار ثابت n است.

۵) همواره نمای حرف b یکی کمتر از مرتبهٔ جمله در بسط دوجمله‌ای است.

۶) برای جملهٔ $Ka^{n-p}b^{p}$ مقدار ضریب K برابر است با:

$$K=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}=C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

که در آن $p!=1\times2\times3\times4\times\cdots\times p$ است.

۷) جمله‌های متساوی‌الفاصله از دو طرف دارای جوابهای ضریبهای مساوی می‌باشند.

۸) ضریب جملهٔ $a^{n-p}b^{p}$ با ضریب جملهٔ $a^{p}b^{n-p}$ برابر است.

۹) $C_n^p=C_n^{n-p}$

۱۰) هرگاه ضریب جملهٔ p ام با ضریب جملهٔ r ام برابر باشد داریم:

$$p+r=n+2$$

۱۱) تعداد جمله‌های بسط عبارت $(\overbrace{a+b+c+\ldots\ldots+1}^{K\text{ جمله متمایز}})^{p}$ از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$\frac{K(K+1)(K+2)\ldots(K+p-1)}{p!}$$

مثلا "تعداد جمله‌ها در بسط $(a+b+c+d)^5$ برابر است با:

$$\frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{5!}=56$$

روابط بین ضریبها وریشه‌ها

اگر عبارتی به صورت $(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)\ldots(x+x_n)$ باشد:
ضریب x^{n-1} برابراست با:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+\ldots+x_n$$

* ضریب x^{n-2} برابر است با.

$$\sum_{i<j} x_i x_j = x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$$

** ضریب x^{n-3} برابر است با:

$$\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$$

*** ضریب x^{n-4} برابر است با :

$$\sum_{i<j<k<\ell} x_i x_j x_k x_\ell$$

مقدار ثابت این حاصلضرب برابر است با :

$$x_1 x_2 \ \cdots \ x_n$$

از آنچه گذشت می‌توان درتعیین مجموع ریشه‌ها ، مجموع حاصلضربهای دو به دوی آنها ، . . . برحسب ضرایب معادله استفاده کرد . زیرا اگر معادلهٔ درجهٔ n ام

$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ دارای n ریشهٔ x_1 ، x_2 ، . . . ، x_n باشد ، آنگاه می‌توان معادله را به صورت :

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0$$

نوشت . در این صورت پس از متحد گذاردن طرفهای چپ دو معادله به دست می‌آوریم $\sum_{i=1}^{n} x_i=-a_1$ ، $\sum_{i<j} x_i x_j=a_2$ ، . . . .

مثال:

ضریب x^2 و مقدار ثابت عبارت $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ را تعیین کنید.

ضریب x^2 یا (x^4-2) برابر است با :

$$\sum_{i<j} x_i x_j=1.1+1(-2)+1(3)+1(-2)+1(3)+(-2)3=-3$$

مقدار ثابت حاصلضرب $x_1x_2x_3x_4=1.1.(-2).3=-6$

بخش پذیری

در تقسیم چندجمله‌ایها همواره داریم :

مقسوم علیه = مقسوم × خارج قسمت + باقیمانده

یا $P(X) \equiv (ax+b)Q(X)+R$

که در آن مقسوم علیه دوجمله‌ای درجه اول $ax+b$ فرض شده است .

I) ــ تعیین باقیمانده : $P(-\frac{b}{a})=R$

II) ــ اگر باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر A و باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-b$ برابر B باشد باقیمانده‌تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)\cdot(x-b)$ برابراست‌با:

$$R=A.\frac{x-b}{a-b}+B.\frac{x-a}{b-a}$$

ویا اگر باقیمانده به صورت $mx+n$ نوشته شود:

$$R=\frac{A-B}{a-b}x+A-\frac{A-B}{a-b}.a$$

بدون استفاده از فرمول بالا نیز می‌توان باقیمانده را تعیین کرد.

مثال:

اگر باقیمانده‌ٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ برابر 4 و بر $x-3$ برابر8باشد. باقیمانده‌ٔ تقسیم $f(x)$ بر حاصلضرب $(x+1)(x-3)$ را تعیین کنید.

$$f(X)\equiv(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$$

((بایدتوجه‌داشت‌که‌چون مقسوم علیه‌از درجه دوم‌است، باقیمانده از درجهٔ اول می‌باشد))

$$\begin{cases} f(-1)=-a+b=4 \\ f(3)=3a+b=8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$$

پس $R=x+5$ = باقیمانده

III) ــ برای‌تعیین باقیمانده‌تقسیم $f(x)$ بر ax^n+b، ابتدا باید $f(x)$ را بر حسب قوای نزولی x^n منظم کرده و سپس به جای x^n مقدار $-\frac{b}{a}$ را قرار داد تا باقیمانده بدست آید.

مثال:

باقیمانده تقسیم $f(x)=-3x^5+7x^4+5x^2+x-3$ را بر x^2+1 تعیین کنید:

$$f(x)=-(3x-7)(x^2)^2+5x^2+(x-3)$$
$$R=-(3x-7)(-1)^2+5(-1)+x-3=-2x-1$$

IV) ــ شرط لازم و کافی برای آنکه $f(x)$ بر $[\phi(x)]^n$ قابل قسمت باشد آن است که $f(x)$ و همهٔ مشتقهای متوالی آن تا مرتبهٔ $n-1$ ام بر $\phi(x)$ قابل‌قسمت باشد.

حالت خاص: شرط لازم و کافی برای این که $f(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش پذیر باشد این است که داشته باشیم :

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$$

مثال:

تحقیق کنید که $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+8x-4$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است .

حل ــ داریم :

$$R=f(1)=1-2-3+8-4=0$$
$$f'(x)=4x^3-6x^2-6x+8$$
$$f'(1)=4-6-6+8=0$$

بنابراین :

$$f(x)=(x-1)^2(x^2-4)$$

۷) ــ هرگاه $f(x)=g(x)\cdot q_1(x)+R_1$ و $\phi(x)=g(x)\cdot q_2(x)+R_2$ باشد، باقیمانهٔ تقسیم $f(x).\phi(x)$ بر $g(x)$ عبارت است از باقیمانه تقسیم $R_1.R_2$ بر $g(x)$، زیرا :

$$f(x).\phi(x)=[g(x)]^2.q_1(x).q_2(x)+R_1g(x).q_2(x)+R_2.g(x).q_1(x)+R_1.R_2$$

ویا

$$f(x)\cdot\phi(x)=g(x)[g(x)\cdot q_1(x)\cdot q_2(x)+R_1q_2(x)+R_2q_1(x)]+R_1.R_2$$

یا

$$f(x).\phi(x)=g(x).q_3(x)+R_1.R_2$$

حال اگر $R_1.R_2$ چند جمله‌ای باشد که بزرگترین توان x در آن از بزرگترین توان x در $g(x)$ بزرگتر یا مساوی با آن باشد ، R_1R_2 بر $g(x)$ تقسیم می‌شود و باقیمانده بدست می‌آید و در غیر این صورت باقیمانده همان R_1R_2 می‌باشد .

مثال:

اگر باقیمانهٔ تقسیم $f(x)$ بر x^2-x+1 برابر x و باقیمانهٔ تقسیم $\phi(x)$ بر همین مقسوم علیه برابر $x-1$ باشد ، باقیمانهٔ تقسیم $f(x).\phi(x)$ بر x^2-x+1 برابر است با :

$$f(x).\phi(x)=(x^2-x+1)\ q_3(x)+x\ (x-1)$$

یا

$$f(x).\phi(x)=(x^2-x+1)\ q_3(x)+\ x^2-x+1-1$$

$$f(x).\phi(x)=(x^2-x+1)[\ q_3\ (x)\ +1]\ -1$$

باقیماندهٔ تقسیم برابر ۱ــ می‌باشد.

VI)ــ بخش پذیری در دو جمله‌ای‌ها با توانهای مشابه:

(۱) a^m+b^m بر a^p+b^p وقتی بخش پذیر است که m مضرب فردی از p باشد (یعنی $m=Kp$ و $K\varepsilon\{1,3,5,7,\ldots\}$).

مثال:

$a^{12}+b^{12}$ بر a^4+b^4 بخش پذیر است ولی $a^{24}+b^{24}$ بر a^4+b^4 بخش پذیر نمی‌باشد.

(۲) a^m-b^m بر a^p-b^p وقتی بخش پذیر است که m مضرب p ((یعنی $m=k.p$)) باشد.

مثال:

a^9-b^9 بر $a-b$ و a^3-b^3 بخش پذیر است ولی بر a^6-b^6 بخش پذیر نمی‌باشد.

(۳) a^m-b^m بر a^p+b^p وقتی بخش‌پذیر است که m مضرب زوجی از p ((یعنی $m=2kp$)) باشد.

مثال:

a^6-b^6 بر a^3+b^3 بخش پذیر ولی بر a^2+b^2 بخش پذیر نمی‌باشد.

(۴) a^m+b^m بر a^p-b^p هیچگاه بخش‌پذیر نمی‌باشد.

مثال:

a^5+b^5 بر $a-b$ بخش‌پذیر نمی‌باشد.

تابع

تابع بیشینه یک عنصر از B مربوط می‌سازد و می‌نویسند f از مجموعهٔ A در مجموعهٔ B، قانونی است که به هر یک ازعناصر A $\quad f : A \longrightarrow B$

یا f قانونی است که به هر عنصر A حداکثر یک عنصر از B مربوط می‌سازد.

$x \varepsilon A \longrightarrow f(x)=y \varepsilon B$

$f(x)$ را مقدار تابع f در x می‌گویند. A را مجموعهٔ مبداء و B رامجموعهٔ مقصد می‌گویند.

می‌توان تابع f از A در B را به صورت زیر مجموعه‌ای‌ازمجموعهٔ‌حاصلضرب $A \times B$ یا به صورت حالت خاصی از رابطه‌ای از A در B تعریف کرد.

باید توجه داشت‌که تابع f همان قانونی است که به هر عضو A حداکثر یک عضو B رامربوط می‌سازد، ولی معمولا" گاهی گفته می‌شود تابع $y=f(x)$. این گفته را به این معنی می‌گیریم که منظور تابعی است که مقدار آن در x برابر $f(x)$ است و آن را با y نشان می‌دهیم.

یا f تابعی است که به‌وسیلهٔ برابری $y=f(x)$ تعریف می‌شود. در این متن ما از این اصطلاح استفاده می‌کنیم و می‌پذیریم که هر رابطه بین x و y معرف یک یا چندتابع است.

دامنهٔ تعریف تابع:

دامنهٔ تعریف تابع f از A در B عبارت است از مجموعهٔ عناصری از A که عنصری از B به آن‌ها مربوط می‌شود.

$D_f=\{x : x \varepsilon A,\ \exists\, y \varepsilon B$ با $y=f(x)\} \subset A$

برد تابع:

بردتابع f مجموعهٔ آن عناصری از B است که به عناصر A نسبت داده شده‌اند:

$R_f=\{y : y \varepsilon B;\ \exists\, x \varepsilon A$ با $y=f(x)\} \subset B$

اگر $R_f=B$ باشد تابع f را تابع پوشا می‌گویند.

اگر $D_f=A$ باشد تابع f را نگاشت می‌نامند.

تابع یک به یک:

تابع f از A در B را یک به یک می‌گویند هرگاه

$x_1, x_2 \varepsilon A$

$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

یا $f(x_1)=f(x_2) \implies x_1=x_2$

تناظر دوسویی:

هرنگاشت پوشاویک به یک از A برروی B رایک تناظر دوسویی بین A و B می‌گویند.

دراین صورت یک تابع g از B برروی A وجود دارد به قسمی که

$$\forall\, y=f(x)\varepsilon B \implies g(y)=x\varepsilon A$$

تابع g را با f^{-1} نمایانده و تابع وارون f می‌نامند.

در توابع مورد مطالعه دراینجا مجموعه‌های مبداء و مقصد هر دو R هستند به عبارت دیگر توابع مورد مطالعهٔ ما توابع حقیقی از یک متغیر حقیقی هستند.

توابع افزایشی و کاهشی، توابع یکنوا:

تابع حقیقی f را افزایشی (کاهشی) می‌نامند هرگاه

$$(x_1<x_2) \implies f(x_1)\leqslant f(x_2) \quad [f(x_1)\geqslant f(x_2)]$$

اگر در سمت راست نابرابری اکید برقرار باشد تابع را اکیدا" افزایشی یا (اکیدا" کاهشی) می‌نامند.

دراین صورت داریم:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geqslant 0 \quad \left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant 0\right)$$

تابع افزایشی یا کاهشی راتابع یکنوا می‌گویند.

هر تابع یکنوا یک به یک است.

چند مثال:

۱) در صورتیکه $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ و $g(x)=\sqrt{x^2+4}$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ

$$f(a+\frac{1}{a})+g(a-\frac{1}{a})$$

با فرض آنکه $0<a<1$ داده شده باشد.

حل:

$$f(a+\frac{1}{a})+g(a-\frac{1}{a})=\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2-4}+\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2+4}=$$

$$\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2}+\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2}=-(a-\frac{1}{a})+a+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}$$

(($a-\frac{1}{a}$ مقداری است منفی و لذا پس از بیرون آوردن از رادیکال به صورت $-(a-\frac{1}{a})$ نوشته میشود زیرا رادیکال همواره مثبت است.))

۲) در صورتیکه $f(\frac{x-1}{x+2})=\frac{x}{x-1}$

باشد ،مطلوب است محاسبهٔ $f(x)$

حل:

قرار می‌دهیم $\frac{x-1}{x+2}=t$

از آنجا: $x=\frac{2t+1}{1-t}$

پس $f(t)=\frac{\frac{2t+1}{1-t}}{\frac{2t+1}{1-t}-1}=\frac{2t+1}{3t}\longrightarrow f(x)=\frac{2x+1}{3x}$

۳) در صورتیکه $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$ باشد ، مطلوب است $f(x,y)$

حل:

قرار می‌دهیم : $\begin{cases}x+y=u\\x-y=v\end{cases}\longrightarrow x=\frac{u+v}{2}\ ,y=\frac{u-v}{2}$

پس $f(u,v)=\frac{(u+v)^2}{4}-\frac{(u-v)^2}{4}=u.v$

$f(x,y)=x.y$

مثال:

دامنه تعریف توابع زیر را تعیین کنید

۱) $y=\sqrt{3-\sqrt{2x-1}}$

حل:

$2x-1\geqslant 0\longrightarrow x\geqslant\frac{1}{2}$

$3-\sqrt{2x-1}\geqslant 0\qquad 9\geqslant 2x-1\qquad 10\geqslant 2x\qquad 5\geqslant x$

$D_f=\{x\,|\,\frac{1}{2}<x<5\}$

۲) $y=\sqrt{x^2-k}$

حل:

$k<0\qquad x\in R\qquad D_f=R$

$k>0 \qquad D_f=\{x/\,|x|>\sqrt{k}\}$

۳) $y=\sqrt{(a-1)x^2+2x+1}$

حل:

$\Delta'=-a+2$

$\Delta'\leqslant 0 \rightarrow a\geqslant 2 \longrightarrow a-1>0 \longrightarrow x\varepsilon R \quad D_f=\mathbb{R}$

$$\Delta'>0 \rightarrow a<2 \begin{cases} a>1\{x\geqslant x_1 \text{ یا } x\leqslant x_2 \\ a<1\{x_1\geqslant x\geqslant x_2 \end{cases}$$

x_2 و x_1 ریشه‌های عبارت درجهٔ دوم زیر رادیکال است.

حالت خاص $a=1 \qquad x\geqslant -\frac{1}{2}$

و فرض شده است $x_2<x_1$.

مثـــال (۱):

دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید؟

$y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$

$x\geqslant 0 \qquad x-\sqrt{x}\geqslant 0 \qquad x\geqslant\sqrt{x} \Longrightarrow x\geqslant 1$

$D_f=\{x|\ x\geqslant 1 \quad ,R_f=\{y|y\geqslant 0\}$

مثال (۲):

$y=\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}$

یادآوری:

$n>m \qquad a>1 \longrightarrow a^n>a^m$

$n>m \qquad 0<a<1 \longrightarrow a^n<a^m$

دامنهٔ تعریف تابع $[3,+\infty[$ و بردآن $\{y;\ 0<y\leqslant\sqrt{2}\}$ است. ماکزیمم y وقتی است که $\sqrt{x-3}$ صفر شود از طرفی وقتی x زیادشودتفاضل دو رادیکال که مثبت است کم می‌شود $(\sqrt{x-1}>\sqrt{x-3})$ وهمیشه مثبت است.

مثال (۳):

$y=\sqrt{x-\sqrt{x-1}}$

$x-1>0 \quad x>1 \longrightarrow x>\sqrt{x}>\sqrt{x-1} \longrightarrow x-\sqrt{x-1}>0 \longrightarrow x>1$

پس $D_f=[1,+\infty[$

برای تعیین برد ، با توجه به اینکه $x-\sqrt{x-1}>0$ کافیست می‌نیمم آنرا تعیین کنیم

می‌نویسیم : $x^2-(2S+1)x+S^2+1=0$ $\quad S-x=-\sqrt{x-1}$ $\quad S=x-\sqrt{x-1}$

شرط حقیقی بودن x

$$\Delta\geqslant 0 \quad (2S+1)^2-4(S^2+1)\geqslant 0 \quad 4S-3\geqslant 0, S\geqslant \frac{3}{4}$$

$$y\geqslant\sqrt{\frac{3}{4}} \rightarrow y\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$$ برد

تعریف تابع فرد وزوج

هرگاه در تابعی با تبدیل x به $-x$ ، y به $-y$ تبدیل شودتابع فردمی‌باشد .

$f(-x)=-f(x)$

هرگاه در تابعی با تبدیل x به $-x$ ، y تغییر نکند ، آن تابع زوج می‌باشد .

$f(-x)=f(x)$

مثال (۱):

تابع فرد $y=\frac{x^3}{x^2-1}$

۲) تابع زوج $y=|x|+\sqrt{x^2-1}$

۳) نه فرد ــ نه‌زوج $y=\sin x+\cos x$

۴) نه فرد ــ نه زوج $y=x^3+x^2-x+1$

۵) گاهی‌فرد ــ گاهی زوج $y=x^n$

تابع مرکب یا تابع تابع ــ گیریم f تابعی است از A در B و g تابعی است از B در C به گونه‌ای که $R_f\cap D_g\neq\phi$ دراین صورت قانونی که به بعضی از عناصر A عنصری از C مربوط می‌سازد با gof نمایانده می‌شود .

دامنهٔ تعریف gof به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$D_{gof}=\{x: x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \qquad (۱)$$

مثال (۱):

تابع‌های $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=x-2$ داده شده‌اند دامنه تعریف f و g و fog وهمچنین توابع fog و gof را تعیین کنید .

$D_f=R$

$f(x)=x^2-1$

$D_{fog}=R$ $\qquad$ $D_{gof}=R$

$g(x)=x-2$ $\qquad$ $D_g=R$

$fog_{(x)}=f[g(x)]=(x-2)^2-1=x^2-4x+3$

$gof=g[f(x)]=x^2-1-2=x^2-3$

مثال (۲):

توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x-2$.

دامنه fog و gof را تعیین کنید وضابطه آنها را بنویسید .

$f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad$ $D_f=[x:x\geqslant 0]$

$g(x)=x-2$ $\qquad$ $D_g=R$

باتوجه به رابطه اول D_{fog} آن مقادیر حقیقی هستند که برای آنها $g(x)$ مقـــدار مثبت یا صفر باشد پس $D_{fog}=\{x:x\geqslant 2\}$ و D_{gof} مقادیر $x\geqslant 0$ هستند که باید متعلق به D_g باشند یعنی

$D_{gof}=\{x:x>0\}$

مثال (۳):

توابع $f(x)=5x-1$ و $g(x)=2x+1$ و $h(x)=x^2$ داده شده‌اند .

اولا" توابع $ho(fog)$ و $ho(gof)$ ر تعیین کنید .

$fog=5(2x+1)-1=10x+4$

$ho(fog)=(10x+4)^2$

$gof=2(5x-1)+1=10x-1$

$ho(gof)=(10x-1)^2$

ثانیا" $(hog)of$ را تعیین کنید .

$hog=(2x+1)^2$

$(hog)of=[2(5x-1)+1]^2=(10x-1)^2$ *

دامنهٔ تعریف همهٔ این توابع R بوده و همه روی R پیوسته‌اند .

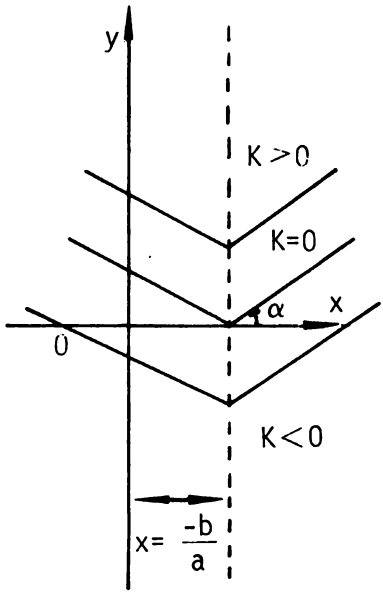
بررسی نمودار چند تابع خاصّ:

I) در تابعهایی به‌صورت :

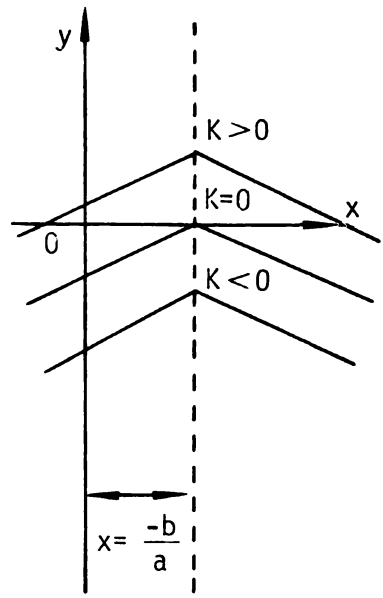
$y=k\pm|ax+b|$

$tg\alpha=|a|$

Y=K+|ax+b|



Y=K-|ax+b|



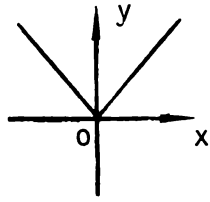
$y=K+|ax+b|$

الف ــ $x=-\frac{b}{a}$ محور تقارن‌نمودار آن است .

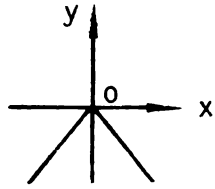
ب ــ این توابع در نقطهٔ $x=-\frac{b}{a}$ مشتق پذیر نیستند .

ج ــ دراین نقطه Min یا Max دارند .

$y=|x|$

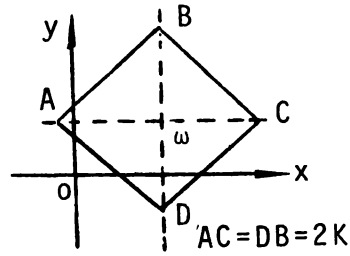


$y=-|x|$



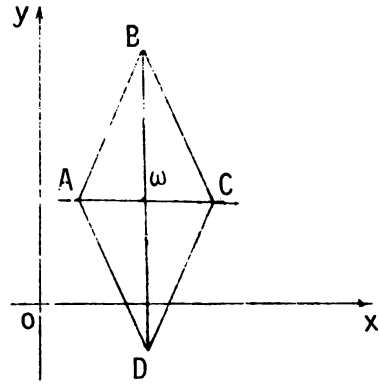
II) نمودار تابعهایی که صورت کلی آنها $|x-a|+|y-b|=k$ است در صورتیکه $k>0$ باشد مربعی است به مرکز $\omega\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ که قطرهایش موازی محورهای مختصات وبه‌طول $2k$ است.

$$|x-a|+|y-b|=k>0$$
$$|x-a|\leqslant k$$



$$-k\leqslant x-a\leqslant k \longrightarrow a-k\leqslant x\leqslant a+k$$
$$|y-b|\leqslant k \longrightarrow b-k\leqslant y\leqslant b+k$$

در صورتیکه $k=0$ باشد، نمایش هندسی تابع یک نقطه، که همان مرکزمربع است، می‌باشد. تابعهایی که صورت کلی آنها $|ax-b|+|cy-d|=k$ باشد در صورتیکه $k>0$ باشد نمایش هندسی آنهایک لوزی است به مرکز: $\omega(\frac{b}{a}, \frac{d}{c})$ که‌قطرهایش به‌موازات‌محورهای‌مختصات‌و به طولهای $\frac{2k}{a}$ و $\frac{2k}{c}$ می‌باشد.



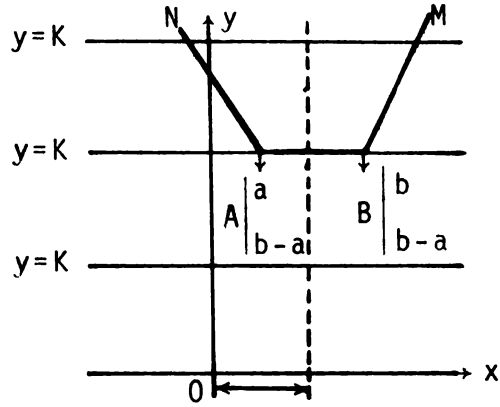
$$-k\leqslant ax-b\leqslant k \quad \begin{cases} \dfrac{b-k}{a}\leqslant x\leqslant \dfrac{k+b}{a} & \text{اگر } a>0 \\[2ex] \dfrac{b-k}{a}\geqslant x\geqslant \dfrac{k+b}{a} & \text{اگر } a<0 \end{cases}$$

$$-k \leqslant cy-d \leqslant k \quad \begin{cases} \dfrac{d-k}{c} \leqslant y \leqslant \dfrac{k+d}{c} & \text{اگر } c > 0 \\ \dfrac{d-k}{c} \geqslant y \geqslant \dfrac{k+d}{c} & \text{اگر } c < 0 \end{cases}$$

در صورتی‌که $k=0$ باشد نمایش هندسی تابع یک نقطه است که همان مرکز لوزی می‌باشد.

III) تابعهایی که صورت کلی آنها $y=|x-a| + |x-b|$ باشد $(b > a)$ نمایش هندسی آنها خط شکسته شامل دو نیم خط و یک پاره خط موازی محور x ها است.

خط $x=\frac{a+b}{2}$ محور تقارن آن است.



$x \leqslant a \Longrightarrow AN$ نیم خط

$a \leqslant x < b \Longrightarrow AB$ پاره‌خط

$x \geqslant b \Longrightarrow BM$ نیم خط

$x = \frac{a+b}{2}$

$AN \longrightarrow y=-2x+a+b$

$AB \longrightarrow y=b-a$

$BM \longrightarrow y=2x-a-b$

تبصره: اگر خط $y=K$ را در نظر بگیریم ملاحظه می‌شود که:

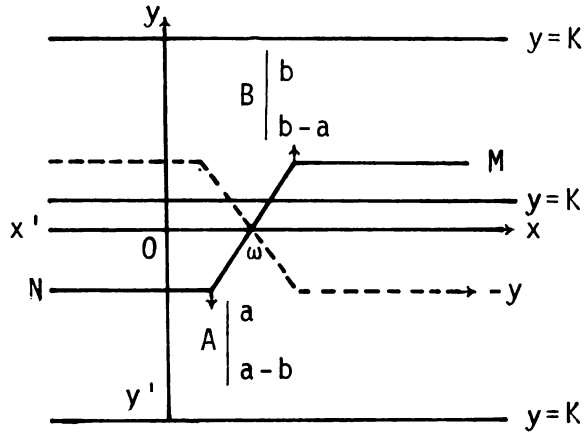
اگر $K>b-a$ آنگاه $y=K$ نمودار تابع $y=|x-a|+|x-b|$ را در دو نقطه قطع کرده لذا معادلهٔ $|x-a|+|x-b|=K$ دارای دو جواب است.

اگر $K=b-a$ آنگاه $y=K$ درنقاط بیشماری نمودار تابع را قطع کرده لذا معادلهٔ اخیر جوابهای بیشمار دارد.

و اگر $K<b-a$ آنگاه $y=K$ نمودار تابع را قطع نکرده و معادله جواب ندارد.

IV) تابعهایی که بصورت کلی $y=|x-a|-|x-b|$ یا $-y=y_1=|x-b|-|x-a|$

باشند نمایش هندسی آنها از دو نیم خط موازی محور x ها و یک پاره خط که دو سر این نیم خطها را بهم وصل می‌کند تشکیل می‌شود .وسط این پاره خط که نقطه‌ای به‌طول $\frac{a+b}{2}$ واقع بر محور x ها است، مرکز تقارن شکل است . (فرض می‌کنیم $a < b$ است) .



$x \leqslant a \implies y=a-b \implies AN$

$a \leqslant x \leqslant b \implies y=2x-a-b \implies AB$

$x \geqslant b \implies y=b-a \implies BM$

تبصره: اگر خط $y=K$ را در نظر بگیریم ملاحظه می‌شود که:

به‌ازاء $K<a-b$ یا $K>b-a$ خط $y=K$ نمودار تابع $y=|x-a|-|x-b|$ را قطع نمی‌کند بنابراین معادله $|x-a|-|x-b|=K$ ریشه ندارد .

به ازاء $a-b<K<b-a$ خط $y=K$ نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند و معادله $|x-a|-|x-b|=K$ یک ریشه دارد .

به ازاء $K=a-b$ یا $K=b-a$ معادله جوابهای بیشمار دارد .

۷) نمایش هندسی تابعهایی که‌صورت کلی آنها $|x-a|-|y-b|=k$ باشد دو زاویهٔ قائمه می‌باشد که راس مشترک ندارند .

$k>0$

1) $x-a \geqslant 0 \implies x \geqslant a$, $y-b \geqslant 0 \implies y \geqslant b \implies x-a-y+b=k$

2) $x-a \geqslant 0 \implies x \geqslant a$ $y-b<0 \implies y<b \implies x-a+y-b=k$

3) $x-a<0 \implies x<a$ $y-b \geqslant 0 \implies y \geqslant b \implies -x+a-y+b=k$

4) $x-a<0 \implies x<a$ $y-b<0 \implies y<b \implies -x+a+y-b=k$

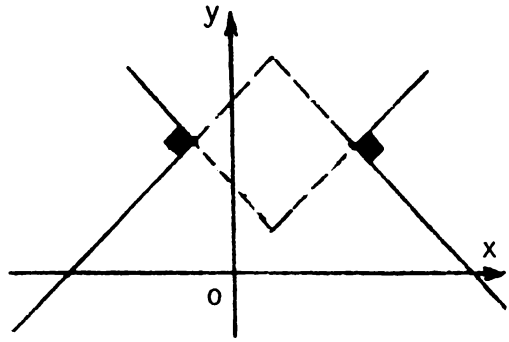
$x-y=k+a-b$

$x+y=k+a+b$

$x+y=-k+a+b$

$x-y=-k+a-b$

$(k=2, a=1, b=3)$



امتداد اضلاع این دو زاویهٔ قائمه تشکیل مربعی می‌دهد که $\omega \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.$ مرکز آن است وطول قطرهای مربع برابر $2k$ می‌باشد.

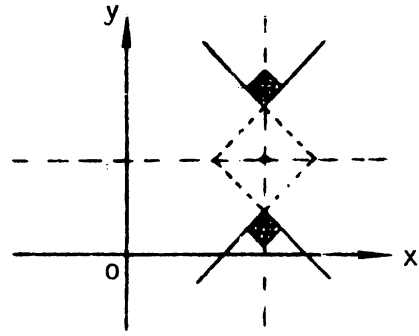
مختصات راس های دو زاویهٔ قائمه عبارت است از: $A \left| \begin{matrix} a+k \\ b \end{matrix} \right.$ و $A' \left| \begin{matrix} a-k \\ b \end{matrix} \right.$

یادآوری (۱):

اگر $k=0$ باشد راس دو زاویهٔ قائمه بر هم منطبق می‌شود یعنی نمودار دو خط عمود برهم را نشان می‌دهد.

یادآوری (۲):

اگر $k<0$ باشد یا اگر $|y-b|-|x-a|=k$ ((که در این حالت $k>0$ است)) نمودار دو زاویهٔ قائمه می‌باشد که در بالا و پائین قرارمی‌گیرند.

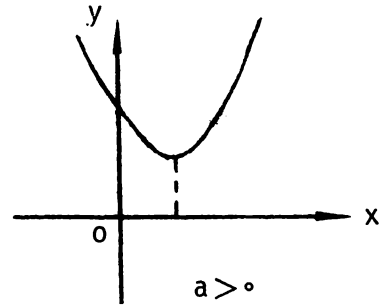


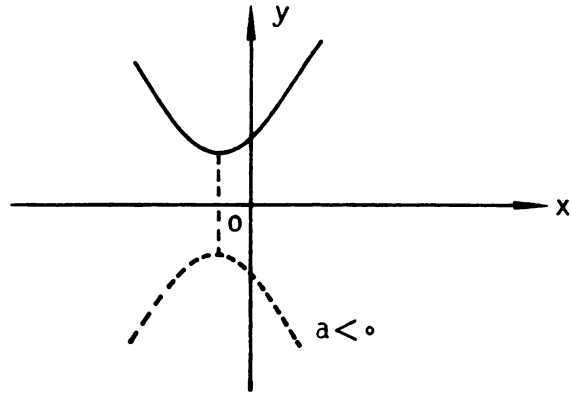
VI) نمایش هندسی تابعهایی به صورت کلی $y=|ax^2 + bx+c|$:

۱) اگر $b^2-4ac < 0$ باشد یک سهمی است و نقطه

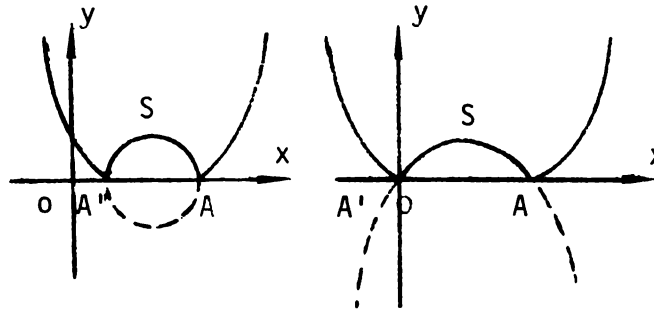
$$S\left(-\frac{b}{2a}, \left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|\right)$$

راس سهمی و نقطهٔ می‌نیمم آن‌است .





۲) اگر $b^2-4ac > 0$ باشد تابع دارای یک ماکزیمم و دو می‌نیمم است .



برای رسم نمودار تابع $y=|ax^2+bx+c|$ ابتدا نمودار $y=ax^2+bx+c$ را رسم کرده و سپس قرینهٔ آن قسمت از منحنی را که زیر محور x ها قرار دارد

نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم. s نقطهٔ ماکزیمم، A و A' نقطه‌های می‌نیمم می‌باشند. این تابع در A و A' مشتق ندارد. برای حل معادله‌هایی به صورت $|ax^2+bx+c|=k$ می‌توان از نقطه‌های برخورد خط $y=k$ با منحنی نمایش تابع $y=|ax^2+bx+c|$ استفاده کرد. درحالتی که شکل سهمی باشد، خط $y=k$ منحنی را در دو نقطه قطع می‌کند ویا بر آن مماس می‌باشد و یا قطع نمی‌کند. یعنی معادلهٔ نظیر دارای دو جواب متمایز ویا یک جواب مضاعف است و یا جواب ندارد. درحالتی‌که $b^2-4ac>0$ باشد (تابع سه نقطهٔ اکسترمم* دارد) اگر $k<0$ باشد معادله جواب ندارد. اگر $k=0$ باشد معادله دو جواب دارد. اگر $k=y_s$ باشد یک ریشهٔ مضاعف و دو ریشهٔ ساده دارد. اگر $k>y_s$ باشد دو ریشهٔ متمایز دارد، اگر $0<k<y_s$ باشد، چهار ریشه متمایز دارد.

حد تابع

تعریف: کیرم تابع f در فاصلهٔ $]a,b[$ تعریف شده است مگر شاید در نقطهٔ $x_0 \in]a,b[$. وقتی x به x_0 می‌گراید، می‌گویند تابع $f(x)$ به ℓ می‌گراید. هرگاه وقتی x به قدر کافی به x_0 نزدیک گردد، $f(x)$ به دلخواه به ℓ نزدیک شود، به عبارت دیگر برای هر عدد دلخواه $\varepsilon>0$ یک عدد مثبت $\delta>0$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که وقتی $|x-x_0|$ از δ کوچکتر است، $|f(x)-\ell|$ از ε کوچکتر باشد، یا به شکل ساده ریاضی می‌گویند حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to x_0$ برابر ℓ است و می‌نویسند.

هرگاه
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)=\ell$$

یا

$$\forall \varepsilon>0 \ , \ \exists \delta>0: \ 0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

عدد مثبت δ معمولاً به ε و x_0 بستگی دارد و گاهی آن را به صورت $\delta(\varepsilon,x_0)$ می‌نویسند

مثال (۱)

نشان دهید حد تابع $f(x)=x^3-3x^2+5$ وقتی $x \to 2$ برابر 1 است.

(* مقصود ماکزیمم و می‌نیمم است.)

حل:

در این مثال تابع f روی $\mathbb{R}$ و از جمله در $x=2$ تعریف‌شده است. باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود دارد به گونه‌ای که وقتی $0 < |x-2| < \delta$ است، آنگاه $|x^3-3x^2+5-1| < \varepsilon$ گردد. برای تعیین δ بر حسب ε نابرابری دوم را به‌ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$|x^3-3x^2+4| = |x-2|^2|x+1| = (x-2)^2|x+1|$$

چون $x \to 2$ پس می‌توانیم $|x-2|$ را از یک عدد مثبت مناسبی مانند 1 کوچکتر بگیریم در این صورت داریم

$$|x-2| < 1 \Longrightarrow -1 < x-2 < 1 \Longrightarrow 2 < x+1 < 4 \Rightarrow |x+1| < \varepsilon$$

پس برای این که $(x-2)^2|x+1| < \varepsilon$ باشد کافی است که $(x-2)^2 < \frac{\varepsilon}{4}$ یا $|x-2| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ باشد، پس $\delta \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$.

حد چپ و حد راست

اگر در تابع $y=f(x)$، x با مقدارهای بزرگتر از a به سمت a میل کند و تابع دارای حد باشد، این حد را حد بالا یا حد راست تابع در نقطهٔ $x=a$ می‌گویند. واگر x با مقادیر کوچکتر از a به سمت a میل کند و تابع دارای حد باشد، این حد را حد پائین ویا حد چپ گویند.

اگر تابعی دارای حد چپ و راست مساوی و معین باشد، تابع درآن نقطه دارای حد است.

مثال (۱):

حد $\underset{x \to 2}{y=\frac{|x-2|}{x-2}}$

حد چپ (پائین) $\underset{\varepsilon \to 0}{x=2-\varepsilon \longrightarrow y=\frac{-x+2}{x-2}=-1}$

حد راست (بالا) $\underset{\varepsilon \to 0}{x=2+\varepsilon \longrightarrow y=\frac{x-2}{x-2}=+1}$

تابع فوق دارای حد چپ و حد راست می‌باشد ولی در نقطه‌ای به طول 2 دارای حد نیست (چون حد دو طرف مساوی نمی‌باشند)

مثال (۲):

$$\text{حد}_{x\to 1}\ y=\frac{2x-1}{x^2+1}\quad\begin{cases} x=1-\varepsilon \Longrightarrow y=\dfrac{2(1-\varepsilon)-1}{(1-\varepsilon)^2+1}=\dfrac{1}{2} \\ \qquad \varepsilon\longrightarrow 0 \\ x=1+\varepsilon \qquad x=\dfrac{2(1+\varepsilon)-1}{(1+\varepsilon)^2+1}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

این تابع دارای حد است زیرا حد چپ و راست آن باهم برابر است .

مثال (۳):

$$y=\frac{1}{x^2}\qquad \begin{cases} x=0-\varepsilon \Longrightarrow \text{حد}\ \dfrac{1}{x^2}\to\infty \\ x=0+\varepsilon \Longrightarrow \text{حد}\ \dfrac{1}{x^2}\to\infty\end{cases}$$

$x\longrightarrow 0$

چون $\lim\limits_{x\to 0} y\to\infty$ و ∞ به‌عنوان حدتعریف نشده‌است لذا تابع در نقطهٔ $x=0$ حد ندارد .

مثال (٤):

$$y=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\longrightarrow\begin{cases} x=1-\varepsilon \\ x=1+\varepsilon \longrightarrow y=0\end{cases}$$

حد چپ ندارد زیرا این تابع در چپ 1 تعریف نشده است .
حد راست دارد .

پیوستگی:

تابع $f(x)$ در نقطه بطول $X=x_1$ پیوسته است وقتیکه:

۱ـ دراین نقطه معین باشد (x_1 متعلق به Df باشد) .

۲ـ بازاء $x\to x_1$ تابع دارای حد ℓ باشد .

۳ـ حد تابع برابر مقدار تابع باشد: $\ell=f(x_1)$.

مثال (۱):

تابع $y=x^2+1$ درنقطه‌ای بطول $x=2$ پیوسته است زیرا :

$$\lim_{x\to 2}[x^2+1]=5\ ,\ f(x_1)=f(2)=5$$

مثال (۲):

تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ درنقطه‌ای بطول $x=0$ پیوسته نیست زیرا در این نقطه نامعین است وحال آنکه بازاء $x \to 0$ دارای حد است.

مثال (۳):

تابع $f(x)$ که با ضابطه

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ f(x)=2, & x=0 \end{cases}$$

تعریف‌شده درنقطهٔ $x=0$ پیوسته نیست اما هم‌معین است و هم دارای حد است.

زیرا که : $\ell=1\neq f(0)=2$

مثال (٤):

تابع $\begin{cases} f(x)=2x-2 & x>2 \\ f(x)=2 & x\leqslant 2 \end{cases}$ در نقطه‌ای بطول $x=2$ پیوسته است

زیرا :

حد راست

$$\ell_1=\lim_{x\to 2+0}(2x-2)=2$$

$$f(x)=2 \qquad x<2$$

حد چپ

$$\ell_2=\lim_{x\to 2-0} f(x)=2$$

$$\ell_1=\ell_2=f(2)=2$$

مثال (۵):

تابع $f(x)=x-E(x)$ درنقطه‌ای بطول $x=2$ پیوسته نیست زیرا

حد راست $\ell_1=\lim_{x\to 2+0}[f(x)]=\lim_{x\to 2+0}[x-E(x)]=2-2=0 \quad \ell_1=0$

حد چپ

$$\ell_2=\lim_{x\to 2-0}[x-E(x)]=2-1=1 \quad , \ \ell_2=1$$

بنابراین بازاء $x\to 2$ حد ندارد.

مثال (۶):

پیوستگی تابع : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^3-1} & x\neq 1\\ \dfrac{2}{3} & x=1\end{cases}$ را در نقطهٔ $x=1$ بررسی کنید :

حل:

چون $f(x)$ درازاء $x=1$ برابر $\frac{2}{3}$ تعریف شده و از طرف دیگر حد تابع وقتی‌که $x\to 1$ برابر $\frac{2}{3}$ است لذا تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است .

مثال (۷):

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}2-x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ را در نقطهٔ $x=0$ بررسی‌می‌کنیم .

می‌دانیم که $-1\leqslant \sin\frac{1}{x}\leqslant 1$ اگر $x>0$ باشد آنگاه $-x\leqslant x\sin\frac{1}{x}\leqslant x$ (1)

و اگر $x<0$ باشد آنگاه $x\leqslant x\sin\frac{1}{x}\leqslant -x$ (2) در هر حال اگر از دو طرف (1) یا (2) وقتی $x\to 0$ حد بگیریم نتیجه می‌شود $0\leqslant \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}\leqslant 0$ و از آنجا $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ پس $\lim_{x\to 0}(2-x\sin\frac{1}{x})=2$.

پس تابع f که در نقطهٔ $x=0$ معین است و حد هم دارد پیوسته نمی‌باشد . زیرا حد تابع با مقدار تابع برابر نیست .

پیوستگی از راست و پیوستگی از چپ:

تعریف: اگر تابع $f(x)$ درمجاورت نقطه‌ای بطول $x=x_1$ دارای حد راست و این حد برابر $f(x_1)$ باشد گوئیم تابع به ازاء $x=x_1$ پیوستگی راست دارد .

و اگر تابع در مجاورت $x=x_1$ دارای حد چپ و این حد برابر $f(x_1)$ باشد گوئیم تابع به ازاء $x=x_1$ پیوستگی چپ دارد .

مثال (۱):

تابع $f(x)=\sqrt{x-2}+1$ درنقطه بطول $x=2$ دارای پیوستگی راست است.

زیرا $\ell_1=\lim\limits_{x\to 2+0}(\sqrt{x-2}+1)=1$

و $f(2)=1$

مثال (۲):

$$f(x)=\begin{cases} 2x & x<2 \\ 4 & x=2 \\ x-2 & x>2 \end{cases}$$

در نقطه‌ای بطول $x=2$ پیوستگی چپ دارد

زیرا $\ell_1=\lim\limits_{x\to 2+0}(x-2)=0$ و $\ell_2=\lim\limits_{x\to 2-0}(2x)=4$

$\ell_2=f(2)=4$

تابع پیوسته در یک فاصله:

تابع f را در $[a,b[$ پیوسته می‌گویند هرگاه درهر نقطهٔ $]b$ و $a[$ پیوسته بوده و در a از راست پیوسته باشد.

قضایای پیوستگی:

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای بطول $x=x_1$ پیوسته باشند.

الفــ توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)-g(x)$ و $f(x).g(x)$ و $\frac{f(x)}{g(x)}$ $[g(x_1)\neq 0]$ نیز در نقطه‌ای بطول $x=x_1$ پیوسته‌هستند.

بــ توابع $[f(x)]^n$ و $[g(x)]^n$ درنقطه‌ای بطول $x=x_1$ پیوسته هستند.

جــ توابع $\sqrt[n]{f(x)}$ و $\sqrt[n]{g(x)}$ اگر درمجاورت x_1 تعریف شوند در x_1 پیوسته هستند.

مثال (۱):

تابع $y=x^2(x-1)$ درنقطه‌ای بطول $x=x_1=0$ پیوسته است اما تابع $y=\sqrt{x^2(x-1)}$ در $x_1=0$ پیوسته نیست زیرا درمجاورت صفر نامعین است.

مثال (۲):

تابع $y=x-2$ همواره پیوسته است اما تابع $y=\sqrt{x-2}$ دردامنه تعریفش پیوسته است.

مثلاً $y=x-2$ در نقطه‌ای بطول $x_1=1$ پیوسته است اما $y=\sqrt{x-2}$ در

این نقطه نامعین است . لذا پیوسته نیست .

تبصره:

توابع کثیرالجمله‌ای همواره پیوسته هستند ، توابع کسری که صورت و مخرج آنها کثیرالجمله است اگر مخرج ریشه نداشته باشدهمواره پیوسته هستند توابع کسری به ازای ریشه‌های مخرج ناپیوسته هستند .توابع گنگی که شماره ریشگی آنها فردو زیر رادیکال‌کثیر الجمله است همواره پیوسته هستند .

بینهایت کوچک

تعریف: گیریم تابع f در همسایگی x_0 تعریف شده و وقتی $x \to x_0$ حد تابع $f(x)$ برابر صفر می‌شود ، دراین صورت $f(x)$ را نسبت به $x-x_0$ یک بینهایت کوچک می‌نامند . $x-x_0$ را بینهایت کوچک اصلی می‌گویند و درجه کوچکی $f(x)$ را وقتی $x \to x_0$ با $x-x_0$ مقایسه می‌کنند . معمولا" برای سادگی درنوشتار و محاسبات x_0 را برابر صفر گرفته و وقتی $x \to 0$ ، x را بینهایت کوچک اصلی می‌گویند .

آشکار است که سرعت گرایش x ، x^2 ، x^3 ، ... به صفر متفاوت است .به‌این سبب لازم می‌آید مرتبهٔ بینهایت کوچک را تعریف کنیم .

مرتبهٔ بینهایت کوچک ــ گیریم n یک عدد مثبت و $f(x)$ نسبت به x یک بینهایت کوچک است . اگر $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = a$ $(a \neq 0, \infty)$ باشد . $f(x)$ را یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ n می‌گویند و ax^n را قسمت اصلی آن می‌نامند .

آشکار است که

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{ax^n} = 1$$

یعنی $f(x)$ و ax^n ازنظرکوچکی‌معادل یا هم‌ارزند . و می‌نویسند :

$$f(x) \sim ax^n$$

دوبینهایت کوچک هم‌ارز ــ گیریم $f(x)$ و $g(x)$ نسبت به x دوبینهایت‌کوچک هستند . اگر

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

باشد می‌گویند دوبینهایت کوچک $f(x)$ و $g(x)$ هم‌ارزند و می‌نویسند :

$f(x) \sim g(x)$ ، $(x \to x_0)$ برای تعیین مرتبه و قسمت اصلی بینهایت کوچک $f(x)$ وقتی $x \to 0$ عدد n را طوری تعیین می‌کنیم که

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = a \qquad a \neq 0, \infty$$

باشد و برای این منظور از دستور هوپیتال یا هم‌ارزی استفاده می‌کنیم. در این صورت مرتبهٔ بینهایت کوچک $f(x)$ برابر n و قسمت اصلی آن ax^n است.

مثال (۱):

تابع $f(x)=ax+bx^2+cx^3+\cdots+kx^n$ وقتی $x \to 0$ یک بینهایت کوچک است حال حد $\frac{f(x)}{x}$ را تشکیل میدهیم.

خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(a+bx+\ldots+kx^{n-1})}{x} = a$$

بنابراین $f(x)$ با x هم مرتبه است و $f(x)$ با ax هم ارز است.

یادآوری (۱):

ax را که بینهایت کوچک هم ارز $f(x)$ است قسمت اصلی بینهایت کوچک $f(x)$ می‌گویند.

یادآوری (۲):

اگر

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}\right] = k \neq 0$$

باشد n را مرتبه بینهایت کوچک $f(x)$ و $k(x-x_0)^n$ را قسمت اصلی بینهایت کوچک $f(x)$ گویند.

مثال (۲):

قسمت اصلی بینهایت کوچک $(x-\sin x)$ $x \to 0$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-\sin x}{x^n} = K \to \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{nx^{n-1}} = K \to \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{n(n-1)x^{n-2}} = K$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} = K$$

اکنون صورت کسر به ازای $x=0$ برابر عدد ثابت است پس برای آنکه این حد یک عدد ثابت باشد باید در مخرج x وجود نداشته باشد یعنی توان x در مخرج کسر برابر صفر باشد از آنجا $n=3$ و $k=\frac{1}{6}$ به دست می‌آید.
بنابراین قسمت اصلی $\frac{1}{6}x^3$ است.

مثال (۳):

قسمت اصلی بینهایت کوچک $(\sqrt{1+x^4}-1)_{x \to 0}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^n} = k \to \lim_{x \to 0} \frac{1+x^4-1}{x^n[\sqrt{1+x^4}+1]} = k \to$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^n[\sqrt{1+x^4}+1]} = k \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{n-4}[\sqrt{1+x^4}+1]} = k \to k=\frac{1}{2}, n=4$$

قسمت اصلی بینهایت کوچک برابر $\frac{1}{2}x^4$ است.

یادآوری:

مثالهای بالا را میتوان بصورت زیر هم بیان کرد. بینهایت کوچک معادل $(x-\sin x)_{x \to 0}$ یا $(\sqrt{1+x^4}-1)_{x \to 0}$ راتعیین‌کنید.
ویابصورت مثال زیر

مثال (٤):

مطلوبست تعیین k, a بقسمی که داشته باشیم.

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{ax^k}\right)=1 \longrightarrow \lim_{x \to 0}\left[\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{ax^k}\right]=1$$

میدانیم $x-\sin x \sim 1/6x^3$ و $x+\sin x \sim 2x$ بنابراین

$$\lim_{x \to 0}\left[\frac{\frac{1}{6}x^3 \times 2x}{ax^k}\right] = \lim_{x \to 0}\left|\frac{x^4}{3ax^k}\right| = 1, \; k=4, a=\frac{1}{3}$$

یادآوری:

ax , $Sinbx$, $tgcx$ وقتی $x \to 0$ بینهایت کوچک‌های معادل هستند زیرا

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{ax}{Sinbx} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{bx}{Sinbx} \cdot \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{Sinbx}{tgcx} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{Sinbx}{Sincx} \cdot Coscx = \lim_{x \to 0} \left[\frac{cx}{Sincx} \cdot \frac{Sinbx}{bx} \cdot \frac{b}{c} \cdot Coscx \right] = 1.1. \frac{b}{c} .1 = \frac{b}{c}$$

در مثالها و یادآوری اخیر از برابری $\lim_{x \to 0} \left(\frac{Sinx}{x} \right) = 1$ استفاده شده است.

مثال(۵):

بکمک توابع هم ارز حدهای زیر را محاسبه می‌کنیم.

۱- $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{Sin3x + tg2x}{4x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{3x+2x}{4x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{5x}{4x} \right) = \frac{5}{4}$$

۲- $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1-Cosx}{x^2+tg^2 3x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2Sin^2 \frac{x}{2}}{x^2+tg^2 3x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2(\frac{x}{2})^2}{x^2+(3x)^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{x^2}{2}}{10x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{20x^2} \right) = \frac{1}{20}$$

۳- $$\lim_{x \to 1} \left[\frac{1+Cos\pi x}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \to 1} \left[\frac{1+Cos[\pi(x-1)+\pi]}{(x-1)^2} \right] =$$

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{1-Cos(x-1)\pi}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \to 1} \left[\frac{2Sin^2 \frac{\pi(x-1)}{2}}{(x-1)^2} \right]$$

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{2 \times [\frac{\pi(x-1)}{2}]^2}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \to 1} \left[\frac{\pi^2 (x-1)^2}{2(x-1)^2} \right] = \frac{\pi^2}{2}$$

یادآوری:

درتعیین حدبعضی از تابعهایی‌که به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آیند آسان‌ترین‌راه‌استفاده از دستور هوپیتال است .

دستورهوپیتال:

اگر $f(a)=g(a)=0$ بوده و $g'(a)\neq 0$ باشد آنگاه داریم .

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

این دستور را می‌توان چند بار پی در پی به‌کار برد .

مثال:

حدهای زیر را تعیین می‌کنیم .

۱- $$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^k+x-2}{x^{3k}+3x-4}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{kx^{k-1}+1}{3kx^{3k-1}+3}\right]=\frac{k+1}{3k+3}=\frac{1}{3}$$

(k عددی است صحیح یا کسری و $k\neq -1$ فرض شده است)

۲- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{4\sin^2x+2\cos x+4\cos 3x}{tg^2x-3}\right]=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{8\sin x\cos x-2\sin x-12\sin 3x}{2tgx(1+tg^2x)}\right]=\frac{1}{8}$$

توابعی که بازاء $x\to a$ بصورت $0\times\infty$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\infty-\infty$ درمی‌آیند عموماً" بسادگی بصورت کلی $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌شوند .

مثال (۱):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(\sin x-\cos x)(tg2x+1)\right]=0\times\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin x-\cos x}{\cot g\,2x}\right]+\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(\sin x-\cos x)\right]=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cos x+\sin x}{-2(1+\cot g^2 2x)}\right]+\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)=\frac{\sqrt{2}}{-2}+0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال (۲):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{tg2x}{\cot g(x-\frac{\pi}{4})}\right]=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cot g\ 2x}}{\frac{1}{tg(x-\frac{\pi}{4})}}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg(x-\frac{\pi}{4})}{\cot g 2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+tg^2(x-\frac{\pi}{4})}{-2[1+\cot g^2 2x]}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

مثال (۳):

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right]=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{[(x-\sin x)(x+\sin x)]}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3\times 2x}{x^4}=\frac{1}{3}$$

زیرا :

$$\sin x\sim x,\ x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$$

بینهایت بزرگ

تعریف: اگر وقتی $x\to x_0$ تابع $f(x)$ به ∞ بگراید می‌گویند $f(x)$ یک بینهایت بزرگ است . معمولا" بزرگی $f(x)$ را با $\frac{1}{x-x_0}$ مقایسه می‌کنند زیرا وقتی $x\to x_0$ کسر $\frac{1}{x-x_0}$ نیز به ∞ می‌گراید . به این سبب $\frac{1}{x-x_0}$ را بینهایت بزرگ اصلی می‌گویند برای سادگی درنوشتار و محاسبه معمولا" خود x را

بینهایت بزرگ اصلی می‌گیرند و می‌گویند وقتی $x \to \infty$ اگر حد $f(x)$ برابر ∞ باشد $f(x)$ را یک بینهایت بزرگ می‌نامند.

مرتبه و قسمت *اصلی یک بینهایت بزرگ*: اگر $f(x)$ نسبت به x یک بینهایت‌بزرگ بوده و عدد مثبت n طوری باشد که

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^n} = a \qquad a \neq 0, \infty$$

گردد، آنگاه می‌گویند بینهایت بزرگ $f(x)$ از مرتبهٔ n و قسمت اصلی آن ax^n است و می‌گویند $f(x)$ هم‌ارز ax^n است و می‌نویسند $f(x) \sim ax^n$ و $(x \to \infty)$ خواص بینهایت بزرگ‌ها شباهت زیادی با خواص بینهایت کوچکها دارد. از جمله بینهایت بزرگهای هم ارز به روش مشابه بینهایت کوچکهای هم‌ارز تعریف‌می‌شود.

مثال (۱):

وقتی $x \to \infty$ تابع $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+ \cdots\cdots$ بینهایت بزرگ است و چون داریم.

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x^n}\right] = \lim \left[\frac{x^n(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}..+..)}{x^n}\right] = a$$

بنابراین مرتبهٔ این بینهایت بزرگ n و قسمت اصلی آن ax^n است.

تبصره (۱): درحالت خاص $K=1$ دوبینهایت بزرگ $f(x)$ و ax^n معادل یاهم‌ارز نامیده میشود.

تبصره (۲): وقتی $x \to \infty$ هر چند جمله‌ای از x هم ارز آن جمله‌ای است که دارای بزرگترین توان است.

مثال (۲):

باتوجه به تبصرهٔ بالا حدهای زیررا تعیین می‌کنیم:

۱- $$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{3x+1}{2x-1}\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{3x}{2x}\right) = \frac{3}{2}$$

۲- $$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{5x^2+x-1}{3x^2+7x}\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{5x^2}{3x^2}\right) = \frac{5}{3}$$

۳- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x^2+2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$

۴- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1}\right) \to \infty$

تبصره:

درحالتی که صورت یا مخرج شامل ریشگی باشد بجای آنها از روابط زیر،هم ارز آنها را قرار میدهیم .

$$(\sqrt{x^2+ax+b}) \underset{x\to\infty}{\sim} \left|x+\frac{a}{2}\right|$$

$$(\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx+c}) \underset{x\to\infty}{\sim} x+\frac{a}{3}$$

$$(\sqrt[n]{x^n+ax^{n-1}+\dots}) \underset{x\to\infty}{\sim} \left|x+\frac{a}{n}\right|$$

مثال (۳):

حد کسرهای زیر را بدست می‌آوریم .

۱- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+5x}}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2+x}{x+1+5x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{6x}\right)=\frac{1}{3}$

۲- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x^2+2x}-x}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+\frac{1}{2}-x}{x+1-x}\right)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+x^2}}\right]= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\left|x+\frac{1}{2}\right|-\left|x-2\right|}{x-\left(x+\frac{1}{3}\right)}\right] =$$

۳- $= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x-\frac{1}{2}+x-2}{-\frac{1}{3}}\right)= \frac{15}{2}$

۴- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{4x+1}}{\sqrt{9x-1}-\sqrt{x+3}}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x}}{\sqrt{9x}-\sqrt{x}}\right) =$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+2\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-\sqrt{x}}\right)= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{2}$$

یادآوری:

در مثال زیر اگر بخواهیم با روش بالا عمل کنیم باید از بسط $(x+a)^{\frac{1}{2}}$ استفاده کنیم که خارج از برنامه است بنابراین از راه دیگری استفاده میکنیم .

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+1}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-a-x+b)(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})(x+a-x-1)}\right]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(b-a)(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+1})}{(a-1)(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(b-a)(\sqrt{x}+\sqrt{x})}{(a-1)(\sqrt{x}+\sqrt{x})}\right]=\frac{b-a}{a-1}$$

یادآوری:

عباراتی را که به ازاء $x\to\infty$ به صورت مبهم $\infty-\infty$ درمی‌آیند علاوه‌بر استفاده از بینهایت بزرگ معادل می‌توان به کمک گویاکردن عبارت رفع ابهام نمود .

مثال:

راه اول

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2+x+1})=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-(4x^2+x+1)}{2x+\sqrt{4x^2+x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x-1}{2x+\sqrt{4x^2+x+1}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-1-\frac{1}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right]=-\frac{1}{4}$$

راه دوم ـ میدانیم $\sqrt{4x^2+x}\sim(2x+\frac{1}{4})$ بنابراین

$$\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+x+1})=\lim_{x\to\infty}\left[2x-(2x+\frac{1}{4})\right]=-\frac{1}{4}$$

مشتق

تعریف: گیریم تابع $f(x)$ در فاصله $]a$ و $b[$ تعریف‌شده است . فرض می‌کنیم x_0 و x_0+h دو نقطه از این فاصله‌اند . اگر

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

وجود داشته باشد. آن را مشتق تابع f در x_0 نامیده و با $f'(x_0)$ می‌نمایانند. h را نمو متغیر و $f(x_0+h)-f(x_0)$ را نموتابع می‌نامند. مشتق تابع f در یک نقطه دلخواه x از این فاصله نیز به روش مشابه تعریف می‌شود.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

می‌توان مشتق چپ و مشتق راست در نقطهٔ x_0 را مانند حد چپ و حد راست تعریف کرد.

$$\text{مشتق راست در } x_0 = f'(x_0^+)=\lim_{\substack{h>0\\ h\to 0}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{مشتق چپ در } x_0 = f'(x_0^-)=\lim_{\substack{h<0\\ h\to 0}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

اگر این دو حد برابر نباشند تابع f در x_0 دارای مشتق نیست ولی مشتق چپ و مشتق راست دارد.

مثال (۱):

مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در $x=0$ به دست آورید:

حل:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}\to+\infty$$

پس این تابع در $x=0$ مشتق ندارد ولی محور y بر آن مماس است.

مثال (۲):

مشتق چپ و مشتق راست تابع $y=f(x)=2+|x-1|$ را در $x=1$ بیابید:

$$f'(1^+)=\lim_{\substack{h>0\\ h\to 0}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{\substack{h>0\\ h\to 0}}\frac{2+|h|-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$$f'(1^-)=\lim_{\substack{h<0\\ h\to 0}}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$$

مثال (۳):

مشتق تابع $y=|f(x)|$ را بیابید.

حل:

$$|f(x)|=\begin{cases}-f(x), & f(x)<0\\ 0 & f(x)=0\\ f(x) & f(x)>0\end{cases}$$ پس

$$(|f(x)|)'=\begin{cases}-f'(x) & f(x)<0\\ 0 & f(x)=0\\ f'(x) & f(x)>0\end{cases}$$

یا

$$(|f(x)|)'=\begin{cases}f'(x)\dfrac{|f(x)|}{f(x)}, & f(x)<0\\ 0, & f(x)=0\\ f'(x)\dfrac{|f(x)|}{f(x)} & f(x)>0\end{cases}$$

پس وقتی $f(x)\neq 0$ است داریم

$$y'=(|f(x)|)'=f'(x)\ \frac{|f(x)|}{f(x)}$$

با استفاده از تعریف مشتق و دستورهای مشتق‌گیری، مشتق‌توابع مقدماتی را حساب می‌کنیم و با استفاده از آنها مشتق‌توابع مرکب را به دست می‌آوریم. این دستورها در کتاب درسی به تفصیل آمده است و در اینجا از بیان آنها خودداری می‌کنیم.

(۱) نمودار یک‌تابع مشتق پذیر در نقطهٔ به طول x_1 :

$m=f'(x_1-0)$

MT مشتق چپ

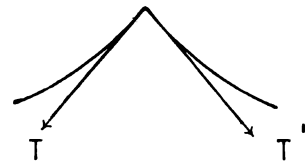
$m=f'(x_1+0)$

MT' مشتق راست

$M\left|\begin{matrix}x_1\\ y_1\end{matrix}\right.$ $f'(x_1-0)=f'(x_1+0)=f'(x_1)$ تابع مشتق پذیر است.

(۲) نمودار یک تابع که در نقطهٔ به طول x_1 دارای مشتق چپ و مشتق راست است ولی دراین نقطه مشتق ندارد.

$M\left|\begin{matrix}x_1\\ y_1\end{matrix}\right.$



اگر $f'(x_1-0)\neq f'(x_1+0)$ آنگاه تابع f در x_1 مشتق پذیر نمی‌باشد .

مثال (۱):

تابع $y=|x|$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست ، زیرا

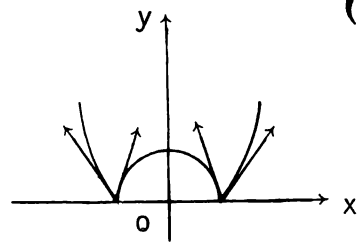
$$y=|x| \longrightarrow y'=\frac{x}{|x|} \quad y'_{(0)}=\frac{0}{0} \quad \begin{cases} y'_{(+0)}=1 & \text{مشتق راست} \\ y'_{(-0)}=-1 & \text{مشتق چپ} \end{cases}$$

مثال (۲):

مشتق تابع $y=\sqrt{1-2x^2+x^4}$ را در نقاطی ازمنحنی واقع بر محور x ها بدست آورید .

$$y=\sqrt{(x^2-1)^2} \longrightarrow y'=\frac{4x(x^2-1)}{2\sqrt{(x^2-1)^2}} \longrightarrow \begin{cases} y'_{(1+0)}=2 \\ y'_{(1-0)}=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'_{(-1+0)}=-2 \\ y'_{(-1-0)}=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$$



تابع دراین نقاط مشتق ندارد .

تبصرهٔ مهم:

درمورد مشتق تابعهای مثلثاتی باید توجه داشت که اندازهٔ کمان مورد نظر با رادیان بیان شده است و اگر واحدهای درجه یا گراد برای اندازهٔ کمان‌منظورشده باشدبایداندازهٔکمان برحسب رادیان محاسبه شده و سپس مشتق گرفته شود .

مثال (۱):

مشتق $y=\cos x^0$ را حساب کنید .

$$\frac{x}{180}=\frac{R}{\pi}\longrightarrow R=\frac{\pi}{180}x$$

" رادیان $x^0=\frac{\pi}{180}x$ " اندازهٔ کمان x° برحسب رادیان

$$y=\cos\left(\frac{\pi}{180}x\right)\longrightarrow y'=-\frac{\pi}{180}\sin\frac{\pi}{180}x=-\frac{\pi}{180}\sin x^0$$

مثال (۲):

مشتق $y=\operatorname{tg}x^g$ را حساب کنید.

اندازهٔ کمان x^g برحسب رادیان $\frac{x}{200}=\frac{R}{\pi}\longrightarrow R=\frac{\pi}{200}x$

$$y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{200}x\right)\longrightarrow y'=\frac{\pi}{200}\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{200}x\right)\right]=$$

$$\frac{\pi}{200}\left[1+\operatorname{tg}^2(x^g)\right]$$

مشتق بعضی ازتابعهای غیر جبری

مقدمه: در آنالیز ریاضی، ثابت می‌کنند که $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ ، $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ وجود دارد. این حد را با حرف e نشان‌می‌دهند. e عددی گنگ است و مقدار تقریبی آن ۲/۷۱۸۲۸۰۰۰ است.

مقدار تقریبی عدد e را با هر تعداد از ارقام اعشاری می‌توان حساب کرد.

لگاریتم طبیعی یا نپری* ـ لگاریتمی است که پایهٔ آن عدد e می‌باشد.

در ریاضیات عالی به سبب اهمیتی که لگاریتم طبیعی دارد آن را با ℓn یا L نشان می‌دهند و از نوشتن پایه خودداری می‌نمایند.

لگاریتم طبیعی (پایه e) $\ell n A$

لگاریتم عادی (پایه 10) $\ell og A$

می‌توان نتیجه گرفت $\ell n\ A=\frac{\ell og A}{\ell og e}$

فرمولهای محاسبه مشتق چند تابع غیر جبری

درتمام فرمولهای زیر V تابعی از متغیر x فرض می‌شود".

---

*ژان نپر Jane Neper (۱۶۱۷–۱۵۵۰) از اهالی اسکاتلند است. (عدد e پایهٔ لگاریتم)

I) $\frac{d}{dx}(\ln V)=\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dx}$

II) $\frac{d}{dx}(\log V)=\frac{\log e}{V}\cdot\frac{dV}{dx}$

III) $\frac{d}{dx}(a^V)=a^V\ln a\cdot\frac{dV}{dx}$

IV) $\frac{d}{dx}(e^V)=e^V\frac{dV}{dx}$

V) $\frac{d}{dx}(u)^V=V.u^{V-1}.\frac{du}{dx}+\ln u\cdot u^V\cdot\frac{dV}{dx}$

"u و V تابعهایی از متغیر x می‌باشند."

VI) $\frac{d}{dx}(\text{Arc Sin}V)=\frac{\frac{dV}{dx}}{\sqrt{1-V^2}}$

VII) $\frac{d}{dX}(\text{ArcCos } V)=-\frac{dV/dX}{\sqrt{1-V^2}}$

VIII) $\frac{d}{dX}(\text{Arc tg } V)=\frac{dV/dX}{1+V^2}$

IX) $\frac{d}{dx}(\text{ArcCotg}V)=-\frac{dV/dX}{1+V^2}$

چند مثال

مثال (۱):

$$y=\ln(x^2+a)\cdot y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d/dx(x^2+a)}{x^2+a}=\frac{2x}{x^2+a}$$

مثال (۲):

$$y=\log\frac{2x}{1+x^2}\longrightarrow y=\log 2x-\log(1+x^2)$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\log e}{2x}\cdot\frac{d}{dx}(2x)-\frac{\log e}{1+x^2}\cdot\frac{d}{dx}(1+x^2)$$

$$y'=\log e.\left(\frac{1}{x}-\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

مثال (۳):

$$y=a^{3x^2}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\ln a.\ a^{3x^2}\ \frac{d}{dx}(3x^2)=6x\ln a.a^{3x^2}$$

مثال (۴):

$$y=e^{\sqrt{x}} \qquad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

مثال (۵):

$$y=x^{\sqrt{x}} \qquad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x^{\sqrt{x}}(2+\ln x)}{2\sqrt{x}}$$

مثال (۶):

$$y=\text{arc tg } ax^2 \qquad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d/dx(ax^2)}{1+(ax^2)^2}=\frac{2ax}{1+a^2x^4}$$

پوش منحنی

یادآوری:

معادلهٔ پوش دسته منحنی‌های $C_a: f(x,y,a)=0$ وابسته به پارامتر a از حذف پارامتر a بین معادلات:

$$\begin{cases} f(x,y,a)=0 \\ f'_a(x,y,a)=0 \end{cases}$$

بدست می‌آید، مفهوم این عمل آن است که معادلهٔ $f(x,y,a)=0$ نسبت به a دارای یک ریشهٔ مضاعف است. با استفاده از این مطلب می‌توان پوش دسته منحنی‌هـای وابسته بیک‌پارامتر را در دو حالت خاص زیر به آسانی پیدا کرد.

الف) $f(x,y,a)$ یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم نسبت به a به صورت

$f(x,y,a)\equiv Aa^2+2Ba+C$ است ،که‌درآن A و B و C تابع‌هایی از x و y می‌باشند . شرط داشتن ریشه مضاعف نسبت به a آن است که‌داشته باشیم $B^2-A.C=0$ و این رابطه معادلهٔ پوش را نشان می‌دهد .

ب) $f(x,y,a)$ یک چند جمله‌ای درجه سوم‌نسبت به a می‌باشد ، مانند $f(x,y,a)\equiv a^3+Pa+Q$ که در آن P و Q تابع‌هایی از x و y می‌باشند .

دراینحالت معادلهٔ پوش عبارت است از :

$$4P^3+27Q^2=0$$

مثال (۱):

پوش دسته خطهائی به معادلهٔ $y=mx+\frac{P}{2m}$ که‌درآن m یک پارامتر است چنین تعیین می‌شود :

$$\begin{cases}2xm^2-2ym+P=0\\4xm-2y=0\end{cases}\longrightarrow m=\frac{y}{2x}\longrightarrow 2x\left(\frac{y}{2x}\right)^2-\frac{y^2}{x}+P=0$$

معادلهٔ پوش $y^2-2Px=0$

مثال (۲):

پوش دسته خط های به معادلهٔ $y=-4ax-2a^2+1$ را تعیین کنید .

حل:

داریم :

$$\begin{matrix}y=-4ax-2a^2+1\\y'_a=-4x-4a\end{matrix}\longrightarrow\begin{cases}y+4ax+2a^2-1=0\\4x+4a=0\end{cases}$$

بین دو معادلهٔ اخیر پارامتر a را حذف می‌کنیم تا معادلهٔ پوش به‌دست آید .

معادله پوش $y-4x^2+2x^2-1=0\longrightarrow y=2x^2+1$

ماکزیمم و مینیمم بعضی از تابعها

برای تعیین ماکزیمم یا مینیمم تابع $y=f(x)$ ، بیان می‌کنیم که معادله $f(x)-y=0$ نسبت به x دارای ریشهٔ مضاعف است . به این ترتیب که ابتدا معادلهٔ تابع را نسبت به x مرتب می کنیم مانند $\varphi(x,y)=0$ و x را بین دو معادلهٔ $\varphi(x,y)=0$ و $\varphi'_x(x,y)=0$ حذف می‌کنیم . اگر $\varphi(x,y)=0$ نسبت به x از درجهٔ دوم باشد ، ریشه‌های $\Delta=0$ ماکزیمم یا مینیمم تابع y است . اگر $\varphi(x,y)=0$ از درجهٔ سوم باشد بازهم ریشه‌های مبین ماکزیمم و مینیمم تابع هستند .

ماکزیمم و می‌نیمم توابع زیر را تعیین کنید .

مثال I :

$$y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$$

$$yx^2-2yx+3y-x^2-2x+3=0$$

یا

$$(y-1)x^2-2(y+1)x+3(y+1)=0$$

$$\Delta=(y+1)^2-3(y^2-1)\geqslant 0$$

$$2(y+1)(2-y)>0 \longrightarrow -1\leqslant y\leqslant 2$$

$$y_{Min}=-1 \quad , \quad y_{Max}=2$$

مثال II :

$$y=\frac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1}$$

$$-3y(y-1) \geqslant 0$$
$$0 \leqslant y \leqslant 1$$

باید توجه داشت که $y=1$ مجانب موازی با محور xها رانشان می‌دهد و نمی تواند ماکزیمم تابع باشد ، لذا تابع فقط می‌نیمم دارد و $y_{Min}=0$ است .

مثال *III*:

$$y=\frac{x^2+2x+25}{(x+1)^2}$$

$$24(y-1) \geqslant 0 \longrightarrow y \geqslant 1$$

اما $y=1$ مجانب منحنی نمایش تغییرات تابع بوده و لذا تابع دارای ماکزیمم ومی‌نیمم نمی‌باشد .

مثال *IV* :

$$y=\frac{x^2-2x+25}{(x+1)^2}$$

$$28y-24>0 \longrightarrow y>\frac{6}{7}$$

$y=\frac{6}{7}$ می‌نیمم تابع را نشان می‌دهد .

مثال *V* :

$$y=\frac{x^2-x-4}{x-1} \longrightarrow y^2-2y+17 \geqslant 0$$

نتیجه:

همواره $y^2-2y+17>0$ یعنی تابع فوق ماکزیمم و می‌نیمم ندارد .

ماکزیمم ومینیمم بعضی ازعبارتها

I) اگر مجموع چند متغیر مثبت مقداری ثابت باشد ، حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است‌که آن متغیرها با هم مساوی باشند " در صورتیکه تساوی آنها ممکن باشد . "

$$x, y, z, \cdots t>0$$

مقداری ثابت

$$x+y+z+\cdots+t=c\underline{\underline{t}}$$
$$P=x\cdot y\cdot z\cdots t$$

اگر $x=y=z=\cdots=t$ باشد آنگاه P ماکزیمم می‌شود .

n متغیر مثبت ، t.... و z و y و x که مجموع آنها مقداری ثابت است وآنرا na فرض می‌کنیم در نظر گرفته و ثابت می‌کنیم که حاصلضرب آنها ،هرچه عاملهای بالا به‌سمت a نزدیک شوند ، بیشتر می‌شود .

اثبات:

اگر عاملهای بالا همه مساوی a نباشند ناچار بعضی از آنها کوچکتراز a و بعضی بزرگتر از a خواهند بود مثلا " اگر $x > a$ و $y < a$ باشد و $x=a+d$ فرض‌شود حاصل ضرب عاملهای داده شده چنین نوشته میشود .

$$1)\ P=(a+d)\times y\times z\times\ldots\ldots\times t$$

اگر در جمله اول d را کم کرده و برای آنکه حاصل جمع تغییر نکند آن را به‌جمله دوم اضافه کنیم حاصل ضرب جدید P' بدست می‌آید از این قرار :

$$2)\ P'=a\times(y+d)\times z\times\ldots\ldots\times t$$

از تفریق رابطه (1) از رابطه (2) حاصل میشود :

$$P'-P=d(a-y)\times z\times\ldots\ldots\times t$$

چون $y < a$ فرض شده و به‌علاوه ، d مقداری مثبت می‌باشد نتیجه می‌شود .

$$P'-P>0 \longrightarrow P'>P$$

حال اگر این عمل را برای عاملهای جدید رابطه(2) تکرار کنیم حاصلضرب دیگری مانند P" بدست می‌آید بطریقی که $P'' > P'$ خواهد بود به این طریق دیده می‌شود که هرچه‌عاملهای داده شده به سمت a میل کنند ، حاصلضرب آنها ترقی می‌کند و بنابراین‌وقتی‌که‌همه آنها مساوی a شوند این‌حاصلضرب ماکزیمم می‌شود .

در حالتی که متغیرهامنحصر به دو عامل باشد راه ساده‌ای برای اثبات قضیه وجود دارد .

$$x,y>0,\quad x+y=a \qquad P=x.y$$

راه اول:

اگر $x=y=\frac{a}{2} \longrightarrow P_{Max}=x.y=x^2=\frac{a^2}{4}$

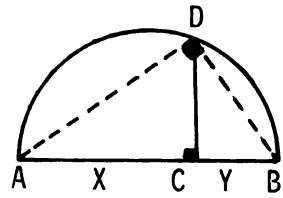
اثبات:

$$(x+y)^2-(x-y)^2\equiv 4x.y \longrightarrow a^2-(x-y)^2=4xy$$

ازتساوی‌اخیرمعلوم می‌شودکه حاصلضرب $x.y$ وقتی ماکزیمم است که جمله مثبت $(x-y)^2$ حداقل باشد ، لذا :

$$(x-y)^2=0 \longrightarrow x=y$$

راه دوم طریق هندسی:



به قطر AB که مجموع دو پاره خط به اندازه‌های x و y می‌باشد نیمدایره‌ای رسم کرده و از نقطه C عمود CD را بر AB اخراج می‌کنیم درمثلث قائم‌الزاویه ADB می‌توان نوشت :

$$CD^2 = x \cdot y$$

این حاصلضرب وقتی ماکزیمم است که CD حداکثر مقدار ممکن خود را اختیار کند واین حالت وقتی است که C مرکز دایره و CD شعاع آن باشد یعنی :

$$x = y = \frac{AB}{2} = R$$

راه سوم استفاده ازمشتق:

$$x + y = a \longrightarrow y = a - x$$

$$P = x(a - x) \longrightarrow P' = a - 2x \longrightarrow P' = 0 \longrightarrow x = \frac{a}{2}$$

x	0		$\frac{a}{2}$		k
P'		$+$	0	$-$	
P	0	$\nearrow$	$\frac{a^2}{4}$	$\searrow$	$k(a-k)$

k حداکثر مقدار ممکن برای x فرض شده است

$$P_{Max} = \frac{a^2}{4}$$

باتوجه به آنکه $x = \frac{a}{2}$ است ، نتیجه می‌شود $y = \frac{a}{2}$ یعنی $x = y$ است .

II) اگر حاصلضرب چند متغیر مثبت مقداری ثابت باشد ، مجموع آنها وقتی می‌نیمم است که آن متغیرها باهم مساوی باشند .

$$x, y, z, \cdots t > 0$$

$$x \cdot y \cdot z \cdots t = c\underline{\underline{t}}$$ مقداری ثابت

$$S = x + y + z + \cdots + t$$

اگر $x = y = z = \cdots = t$ باشد مقدار می‌نیمم S بدست می‌آید.در حالتی که متغیرها منحصر به دو عامل باشد راه ساده‌ای برای اثبات قضیه وجوددارد :

$x, y > 0 \qquad x.y=P \qquad S=x+y$

اگر $x=y$، آنگاه مینیمم S بدست میآید.

اثبات:

$(x+y)^2 \equiv 4xy+(x-y)^2$

$(x+y)^2=4P+(x-y)^2$

از تساوی اخیر معلوم می‌شود که $(x+y)^2$ و در نتیجه $x+y$ وقتی می نیمم است که عامل مثبت $(x-y)^2$ حداقل باشد و لذا:

$(x-y)^2=0 \longrightarrow x=y$

III) اگر x و y و z سه متغیر مثبت و مجموع آنها مقدار ثابتی باشد، حاصلضرب توانهای مختلف آنها وقتی ماکزیمم است که متغیرها متناسب با توانهایشان باشند.

$x, y, z>0 \qquad S=x+y+z=c\underline{\underline{t}} \qquad P=x^m.y^n.z^t$

اگر $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{t}$ باشد ماکزیمم P بدست می‌آید.

IV) اگر x و y و z سه متغیر مثبت و حاصلضرب توانهای مختلف آنها مقدار ثابتی باشد مجموع این سه متغیر وقتی می‌نیمم است که متغیرها متناسب با توانهایشان باشند.

$x, y, z>0 \qquad P=x^m.y^n.z^t=c\underline{\underline{t}} \qquad S=x+y+z$

اگر $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{t}$ باشد مینیمم S بدست می‌آید.

V) اگر مجموع دو متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع مربعاتشان وقتی می‌نیمم است که آن دو متغیر مساوی باشند.

$x, y>0 \qquad x+y=a \qquad S=x^2+y^2$

اگر $x=y$ باشد می‌نیمم $S=x^2+y^2=2x^2=2y^2$ بدست می‌آید.

اثبات:

از اتحاد $x^2+y^2 \equiv (x+y)^2-2xy=a^2-2xy$ و باتوجه به قضیه I مطلب ثابت می‌شود.

VI) اگر مجموع مربعات دو متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی ماکزیمم است که آن دو متغیر مساوی باشند.

$x, y>0 \qquad x^2+y^2=a=\underline{\underline{c}}t \qquad S=x+y$

اگر $x=y$ باشد ماکزیمم $S=x+y=2x=2y$ بدست می‌آید.

با استفاده از اتحاد: $2(x^2+y^2)=(x+y)^2+(x-y)^2$ مطلب اثبات می‌شود.

VII) اگر مجموع مربعات دو متغیر مثبت x و y مقدار ثابتی باشد ماکزیمم عبارت $ax+by$ (a و b مقدارهای معلوم‌اند) وقتی حاصل می‌شود که هر متغیر متناسب با ضریب خود باشد .

$$x,y>0 \qquad x^2+y^2=k^2=c\underline{\underline{t}} \qquad S=ax+by$$

اگر $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ باشد آنگاه ماکزیمم $S=ax+by$ بدست می‌آید .

با استفاده از اتحاد : $(ax+by)^2+(bx-ay)^2\equiv(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

مطلب اثبات می‌شود .

VIII) اگر تفاضل مربعات دو متغیر مثبت y و x مقدار ثابتی باشد ماکزیمم عبارت $|ax-by|$ ، (a و b مقدارهای معلوم‌اند) وقتی حاصل می‌شود که هر متغیر متناسب با ضریب خود باشد .

$$x,y>0 \qquad x^2-y^2=k^2=c\underline{\underline{t}} \qquad S=|ax-by|$$

اگر $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ باشد ماکزیمم $S=|ax-by|$ به‌دست‌می‌آید .

بااستفاده از اتحاد :

$$(ax-by)^2-(bx-ay)^2\equiv(a^2-b^2)(x^2-y^2)$$

مطلب اثبات می‌شود .

IX) اگر متغیرهای x و y و z و ضریبهای α و β و γ مقدارهای مثبت و $x^2+y^2+z^2$ مقدار ثابت باشد ، عبارت $\alpha x+\beta y+\gamma z$ وقتی ماکزیمم است که : $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ باشد .

مطلب با استفاده از اتحاد زیر ثابت می‌شود :

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)\equiv(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2+(\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2$$

چند مثال :

(۱) ماکزیمم عبارت $y=\frac{x}{(x+1)^2}$ را تعیین کنید . $(x>0)$

$$y=\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{x+1}$$

مقدار ثابت $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}=1$

$$y_{Max} \Longrightarrow \frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1} \Longrightarrow x=1 \Longrightarrow y_{Max}=\frac{1}{4}$$

(۲) اگر $x+y=2a$ ، $x,y>0$ باشدمی نیمم‌عبارت $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ را تعیین

کنید .

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2a}{xy}$$

عبارت $\frac{2a}{xy}$ وقتی می‌نیمم است که xy ماکزیمم باشد .

$$(x.y)_{Max} \longleftrightarrow x=y=a$$

$$\frac{2a}{xy}=\frac{2a}{a^2}=\frac{2}{a}$$

(۳) می‌نیمم عبارت $y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$ را تعیین کنید .

$$y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{x^2+1}$$

مقداری ثابت

$$\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}.\sqrt{x^2+1}=4$$

$$y_{Min} \longrightarrow \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1} \longrightarrow x^2=3 \longrightarrow y_{Min}=4$$

(۴) اگر $x+y=12$ ، $y>0$ ، x باشند ماکزیمم عبارت $p=x^4y^2$ را تعیین کنید :

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{2} \longrightarrow x=2y$$

$$\begin{cases} x=2y \\ x+y=12 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x=8 \\ y=4 \end{matrix} \longrightarrow P_{Max}=(8)^4.(4)^2$$

یادآوری مهم:

۱ــ از نامساوی $(a-1)^2 \geqslant 0$ می‌توان نتیجه گرفت که : $a^2+1 \geqslant 2a$

اگر $a<0$ باشد ، با تقسیم کردن دو طرف نامساوی بر مقدار a داریم :

$$a+\frac{1}{a} \geqslant 2$$

یعنی حاصل جمع یک مقدار مثبت و عکس آن همواره از 2 بزرگتر و یاحداقل مساوی با 2 می‌باشد .

از نامساوی $(a+1)^2 \geqslant 0$ می‌توان نتیجه گرفت که : $a^2+1 \geqslant -2a$

اگر $a<0$ باشد ، باتقسیم کردن دو طرف نامساوی بر مقدار a :

$$a+\frac{1}{a} \leqslant -2$$

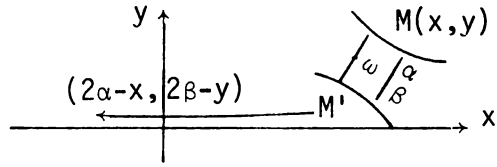
یعنی حاصل جمع یک مقدار منفی و عکس آن همواره از 2- کوچکتر و یاحداکثر

مساوی با 2- می‌باشد .

تقارن

مرکز تقارن : شرط آنکه نقطهٔ $\omega(\alpha,\beta)$ مرکز تقارن منحنی به‌معادلـه $y=f(x)$ باشد لازم است که $2\beta-y\equiv f(2\alpha-x)$ باشد و بـرای تابـع $f(x,y)=0$ این شرط چنین است :

$$f(2\alpha-x,2\beta-y)\equiv f(x,y)$$



مثال (۱):

مرکز تقارن منحنی $y=x^3-3x+2$ را بدست آورید .

$$2\beta-y\equiv(2\alpha-x)^3-3(2\alpha-x)+2$$

$$2\beta-y\equiv 8\alpha^3-3(2\alpha)^2x+3(2\alpha)x^2-x^3-6\alpha+3x+2$$

$$2\beta-(x^3-3x+2)\equiv 8\alpha^3-12\alpha^2x+6\alpha x^2-x^3-6\alpha+3x+2$$

$$2\beta-x^3+3x-2\equiv 8\alpha^3-12\alpha^2x+6\alpha x^2-x^3-6\alpha+3x+2$$

از برابر قرار دادن ضریب‌های جمله‌های متشابه نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} 6\alpha=0 \\ -12\alpha^2=0 \\ 2\beta=8\alpha^3-6\alpha+4 \end{cases} \Longrightarrow \quad \omega\left|\begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta=2\end{array}\right.$$

یادآوری:

منحنی تابعهای درجه سوم به معادله $y=ax^3+bx^2+cx+d$ دارای یک نقطهٔ عطف می‌باشد که طول آن $\frac{-b}{3a}$ است . این نقطه‌مرکزتقارن‌منحنی‌است . با معلوم بودن طول مرکز تقارن می‌توان عرض آن را بدست آورد .

مثال (۲):

تحقیق کنید نقطهٔ $\omega\left|\begin{array}{l}1\\0\end{array}\right.$ مرکز تقارن منحنی نمایش $x^2-y^2-2x=8$ می‌باشد .

حل:

$$f(2-x,y)=(2-x)^2-y^2-2(2-x)-8\equiv x^2-y^2-2x-8$$
$$f(x,y)=x^2-y^2-2x-8=0$$
$$4+x^2-4x-y^2-4+2x-8\equiv x^2-y^2-2x-8$$
$$x^2-y^2-2x-8\equiv x^2-y^2-2x-8$$

بنابراین نقطهٔ ω مرکز تقارن منحنی است .

چند نکته درمورد مرکز تقارن

I ــ در تابعهای هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ نقطه $\omega(-\frac{b'}{a'},\frac{a}{a'})$ یعنی محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی است .

مثال :

در تابع $y=\frac{3x-1}{4-2x}$ نقطهٔ $\omega\left|\begin{matrix}2\\-\frac{3}{2}\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن است .

II ــ در تابعهایی به صورت

$$A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2=C$$

نقطهٔ $\omega\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی آن است .

مثال:

در تابع $4(y+1)^2-(x-2)^2=1$ نقطهٔ $\omega\left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن است .

III ــ در تابعهایی بصورت :

$$(a,b\neq 0),\ ax^2+by^2+cx+dy+e=0$$

نقطهٔ $\omega(-\frac{c}{2a},-\frac{d}{2b})$ مرکز تقارن منحنی آن است .

مثال:

مختصات مرکز تقارن منحنی تابع $4x^2-8x-y^2-6y+11=0$ عبارت است از :

$$\omega\left|\begin{array}{l}-\frac{-8}{8}=1\\ -\frac{-6}{-2}=-3\end{array}\right.$$

IV ـ در تابعهایی به صورت $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ نقطه

$$\omega\left|\begin{array}{l}-\frac{b'}{a'}\\ m(-\frac{b'}{a'})+n\end{array}\right.$$

مرکز تقارن است که درآن $y=mx+n$ معادلهٔ مجانب مایل منحنی است. یا عرض مرکز تقارن عبارت است از مقدار مشتق صورت بر مشتق مخرج درازاء ریشهٔ مخرج.

مثال:

مختصات مرکز تقارن منحنی تابع $y=\frac{x^2-8x+19}{x-5}$ عبارت است از: محل برخورد مجانب مایل و مجانب قایم یعنی $x=5$ و مجانب مایل $y=x-3$.

$$\frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}}=[\frac{2x-8}{1}]=2 \longrightarrow \omega\left|\begin{array}{l}5\\2\end{array}\right. \qquad \omega\left|\begin{array}{l}5\\5-3=2\end{array}\right.$$

۷- در تابعهایی که به صورت $y=\frac{x^2+Px+q}{x^2+P'x+q'}$ باشند و رابطهٔ $P'(P-P')=2(q-q')$ برقرار باشد، دراین صورت نقطهٔ $\omega(-\frac{P'}{2},1)$ مرکز تقارن است.

مثال:

اولا" در تابع $y=\frac{x^2-4x+8}{x^2+mx+8}$ پارامتر m را طوری معین کنیدکه منحنی نمایش آن دارای مرکز تقارن باشد. ثانیا" محتصات مرکز تقارن منحنی حاصل را بدست آورید.

حل:

داریم:

$$m(-4-m)=2(8-8) \longrightarrow \begin{cases} m=0\\ m=-4\end{cases}$$

در ازاء $m=-4$, $y=1$ است و لذا $m=-4$ نمی‌تواند مورد قبول باشد و اگر $m=0$ باشد.

$$\omega\left|\begin{matrix}-\frac{P'}{2}=-\frac{m}{2}=0\\ 1\end{matrix}\right.$$

مرکزتقارن منحنی است .

VI– برای تابعهایی‌که معادلات آنهابه صورت $k(x-a)^{2n}\pm k'(y-b)^{2m}=\ell$ باشد نقطهٔ $\omega(a,b)$ مرکز تقارن است زیرا :

$$\begin{matrix}x-a=X\\ y-b=Y\end{matrix}\longrightarrow KX^{2n}\pm K'Y^{2m}=\ell$$

و اگر X رابه$-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل کنیم تابع تغییر نمی‌کند .

VII – در تابعهائی که به صورت

$$y=a(x-\alpha)^{2k+1}+b(x-\alpha)^{2k-1}+\cdots+m(x-\alpha)+\beta$$

می‌باشند $\omega\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن است زیرا :

$$x-\alpha=X\ ,\quad y-\beta=Y$$

$$Y=aX^{2k+1}+bX^{2k-1}+\cdots+mX$$

اگر X را به $(-X)$ تبدیل کنیم y به $(-y)$ تبدیل می‌شود .

$$X\longrightarrow -X\Longrightarrow y\longrightarrow -y$$

مثال:

$$(1)\quad y=(x-1)^3+3(x-1)-2\longrightarrow \omega\left|\begin{matrix}1\\ -2\end{matrix}\right.$$

$$(2)\quad y=(x-2)^3+x\longrightarrow y=(x-2)^3+(x-2)+2\longrightarrow \omega\left|\begin{matrix}2\\ 2\end{matrix}\right.$$

$$(3)\quad y=(x-3)^5+3x\longrightarrow y=(x-3)^5+3(x-3)+9\longrightarrow \omega\left|\begin{matrix}3\\ 9\end{matrix}\right.$$

VIII – در تابعهایی که به صورت $y=\alpha x+\beta\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$ باشند نقطهٔ

$$\omega\left|\begin{matrix}-\frac{b}{2a}=x_1\\ \alpha x_1+\beta\end{matrix}\right.\quad(a\neq 0)$$

مرکز تقارن است .

مثال:

نقطهٔ $\omega(2,5)$ مرکز تقارن منحنی تابع

$$(1)\ y=2x+1\pm\sqrt{x^2-4x-1}$$

است .

زیرا می‌توان نوشت :

$$y=2x+1\pm\sqrt{x^2-4x-1} \longrightarrow y=2x+1\pm\sqrt{(x-2)^2-5} \longrightarrow$$
$$y=2(x-2)+5\pm\sqrt{(x-2)^2-5}$$
$$Y-5=2(x-2)\pm\sqrt{(x-2)^2-5} \longrightarrow x-2=X\,,\,y-5=Y$$

اگر X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل کنیم تابع تغییر نمی‌کند .

$$Y=2X\pm\sqrt{x^2-5}$$

تعیین مرکز تقارن همین منحنی با استفاده از فرمول ، داریم :

$$\omega\left|\begin{array}{l}-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2}=2\\ 2.2+1=5\end{array}\right.$$

$$(2)\quad y=2x+1\pm\sqrt{x^2-4} \longrightarrow \omega\left|\begin{array}{l}0\\1\end{array}\right.$$

$$(3)\quad y=2\pm\sqrt{x^2+x-1} \longrightarrow \omega\left|\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\\2\end{array}\right.$$

مرکز تقارن

$$(4)\; y=2x+\sqrt{x^2-2x}$$

منحنی این تابع مرکز تقارن ندارد . (نصف بیضی) *

$$(5)\quad y=2x\pm\sqrt{-x^2+2x-7}$$

رادیکال همواره منفی است و مرکز تقارن ندارد .

IX – در تابعهایی که به صورت $y=(ax+b)^m$ باشند اگر m فرد " یعنی $m=2k+1$" باشد ، نقطهٔ $\omega(-\frac{b}{a},0)$ مرکزتقارن‌است .

زیرا :

$$x=X-\frac{b}{a}\;,y=Y \longrightarrow Y=(aX)^m$$

اگر m زوج یعنی $m=2k$ باشد منحنی مرکز تقارن ندارد .

مثال:

مختصات مرکز تقارن $y=(2x-1)^3$ را بدست آورید . $\omega\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\0\end{array}\right.$

X – در تابعهایی که به‌صورت $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ می‌باشند (صورت کلی معادله یک مقطع مخروطی)برای تعیین مرکز تقارن(در صورتیکه دارای مرکـزتقارن باشد) می‌توان چنین عمل کرد :

---

* در بخش مقطعهای مخروطی توضیح داده شده است .

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2ax+by+d=0 \\ bx+2cy+e=0 \end{cases}$$

جوابهای این دستگاه، مختصات مرکزتقارن منحنی می‌باشد.

مثال:

مختصات مرکز تقارن منحنی $2x^2+y^2+4x-4y-2xy+4=0$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} f'_x=4x+4-2y=0 \\ f'_y=2y-4-2x=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$ مرکز تقارن

یادآوری:

اگر درمعادله مقطع مخروطی $b=0$ باشد، هر یک از معادلات دستگاه‌یک، محور تقارن را نشان می‌دهد.

مثال:

$x^2+y^2-2x+y+1=0$

$$\begin{cases} f'_x=2x-2=0 \\ f'_y=2y+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$ مرکز تقارن

چون در معادله منحنی $b=0$ است، لذا منحنی دارای محورهای تقارن $x=1$ و $y=-\frac{1}{2}$ می‌باشد.

XI ــ به طور کلی برای یافتن مرکز تقارن منحنی تابع $y=f(x)$، مختصات این نقطه را $\omega(\alpha,\beta)$ فرض کنیم. سپس مبداء مختصات را بر ω انتقال می‌دهیم، یعنی درمعادلهٔ منحنی $y=f(x)$ قرار می‌دهیم $x=X+\alpha$ ، $y=Y+\beta$ سپس در معادلهٔ حاصل X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل می‌کنیم، ضریب جملاتی را که تغییر می‌کنندبرابر صفرقرارمی‌دهیم تا α و β به دست آیند.

XII ــ قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ نسبت به خط D به معادلهٔ $ax+by+c=0$ نقطه‌ای است مانند:

$$A'\left|\begin{matrix}\alpha-2\lambda a\\ \beta-2\lambda b\end{matrix}\right.$$

که درآن λ از $\lambda=\dfrac{a\alpha+b\beta+c}{a^2+b^2}$ بدست‌می‌آید.

مثال:

قرینهٔ $A\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right.$ نسبت به خط D به معادلهٔ $x+y-8=0$ چنین بدست می‌آید:

$$\lambda=\frac{-1+3-8}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \qquad A'\left|\begin{matrix}-1+6=5\\3+6=9\end{matrix}\right.$$

XIII ــ قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به نقطهٔ $S\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ نقطه‌ای است‌مانند A' به‌مختصات $A'\left|\begin{matrix}2\alpha-x\\2\beta-y\end{matrix}\right.$

مثال:

قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ نسبت به نقطهٔ $S\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$ عبارتست از:

$$A'\left|\begin{matrix}-2-0=-2\\2-2=0\end{matrix}\right. \longrightarrow A'\left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right.$$

XIV ــ قرینهٔ خط نسبت به نقطه:

قرینهٔ‌خط D به معادلهٔ $ax+by+c=0$ نسبت‌به‌نقطه $S\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ چنین بدست می‌آید که‌بگیریم:

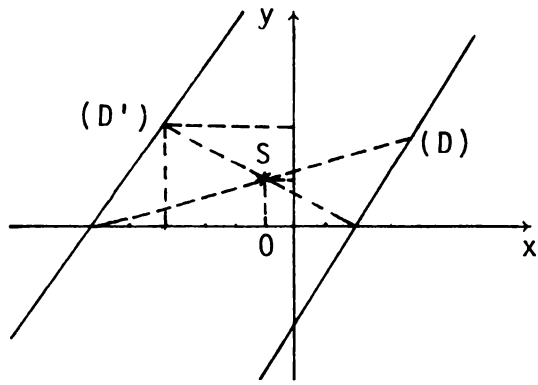
$$x=2\alpha-X \qquad y=2\beta-Y$$

و مقادیر x و y را درمعادلهٔ خط (D) قرار دهیم.

مثال:

قرینهٔ خط D به‌معادلهٔ $2x-y=4$ نسبت به نقطهٔ $S\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$ چنین است:

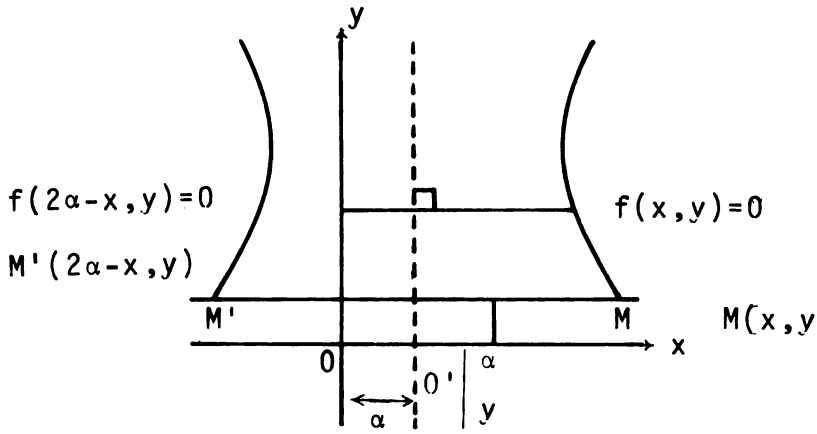
$$\begin{cases}x=-2-X\\y=4-Y\end{cases} \longrightarrow 2(-2-X)-(4-Y)=4 \longrightarrow Y=2X+12 \quad (D')$$



محور تقارن:

I ـ شرط آنکه خط $x=\alpha$ محور تقارن منحنی $y=f(x)$ باشد آن است که: $f(x)\equiv f(2\alpha-x)$ باشد و این شرط برای تابع $f(x,y)=0$ چنین است:

$f(x,y)=f[(2\alpha-x),y]$



مثال:

محور تقارن هریک از منحنی‌های زیر را که موازی با محور Y ها می‌باشد تعیین کنید.

۱- $Y=x^2+2x+7$

۲- $Y=\dfrac{2}{(x-1)^2}$

۳- $Y=|x-2|$

حل (۱):

$$x^2+2x+7\equiv(2\alpha-x)^2+2(2\alpha-x)+7$$

$$x^2+2x+7\equiv 4\alpha^2+x^2-4\alpha x+4\alpha-2x+7 \longrightarrow$$

$$\begin{cases}2=-2-4\alpha\\0=4\alpha^2+4\alpha\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\alpha=0,-1\end{cases}$$

فقط $\alpha=-1$ جواب است.

۲)

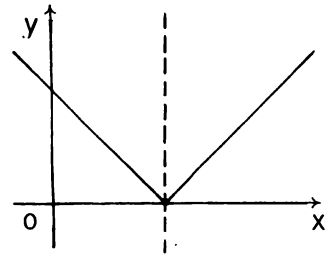
$$\frac{2}{(x-1)^2}\equiv\frac{2}{(2\alpha-x-1)^2}\longrightarrow x^2-2x+1=4\alpha^2+x^2$$

$$-4\alpha x-4\alpha+2x+1$$

$$\begin{cases}-2=-4\alpha+2\\1=4\alpha^2-4\alpha+1\end{cases}\longrightarrow\begin{matrix}\alpha=1\\\alpha=0,1\end{matrix}$$

فقط $\alpha = 1$ جواب مسئله است .

۳) $y=|x-2| \longrightarrow$ $x-2>0 \longrightarrow x>2 \longrightarrow y=x-2$
$x-2<0 \longrightarrow x<2 \longrightarrow y=2-x$



خط $x=2$ محور تقارن نمودار تابع $y=|x-2|$ است .

راه دیگر:

قبلا" دیده شد در تابعهایی که‌به صورت $y=k\pm|ax+b|$ باشند خط $x=-\frac{b}{a}$ محور تقارن منحنی نمایش تغییرات تابع است .

***II*- تعیین محورتقارن بعضی ازمنحنی‌ها :**

(۱) ــ در تابع $y=ax^2+bx+c$ خط $y=-\frac{b}{2a}$ محورتقارن‌منحنی‌آن است .

(۲)ــ در تابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ هرگاه $ab'-ba'=0$ باشددر این صورت خط $x=\frac{-b}{2a}=-\frac{b'}{2a'}$ محور تقارن منحنی است .

صورت مشتق تابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ در حالت کلی یک‌معادله درجه دوم اســـت‌باستثنای حالتی که $ab'-ba'=0$ باشد . دراین حالت مشتق‌از درجه اول می‌باشد و تابع فقط دارای یک‌ماکزیمم و یا یک می‌نیمم می‌شود . بنابراین اگر

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$$

باشد ، تابع یک ماکزیمم یا یک می‌نیمم دارد . زیرا اگر قرار دهیم :

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=K \longrightarrow b'=Kb,\quad a'=Ka \qquad x+\frac{b}{2a}=X$$

داریم :

$$y=\frac{ax^2+b}{K(ax^2-} \qquad =$$

$$= \frac{a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}}{aK(x+\frac{b}{2a})^2+c'-\frac{b^2K}{4a}} \qquad c-\frac{b^2}{4a}=B \qquad c'-\frac{b^2K}{4a}=B'$$

$$y=\frac{aX^2+B}{a'X^2+B'}$$

دراین تابع با تبدیل X به $X-$ مقدار y تغییر نمی‌کند.
چون تابع یک ماکزیمم و یا یک می‌نیمم دارد لذا نقطهٔ ماکزیمم و یا می‌نیمم روی محورتقارن واقع است.

مثال:

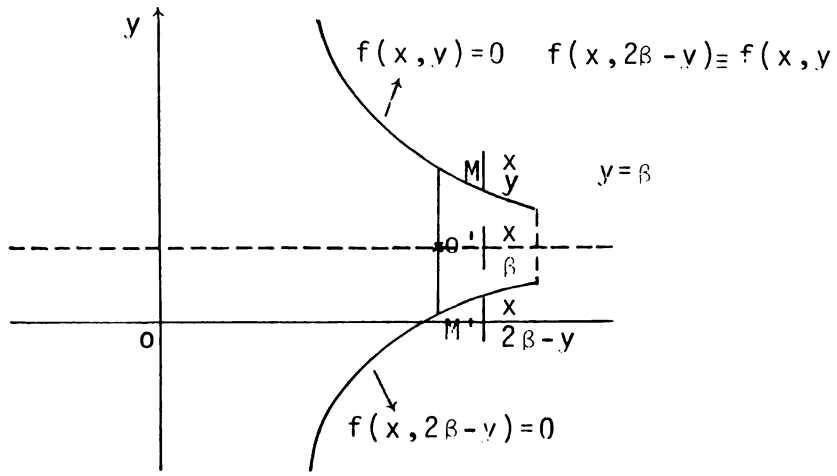
در تابع $y=\frac{4x^2+mx-3}{x^2+4x-7}$ ، m را طوری تعیین کنیدکه منحنی‌نمایش تغییرات تابع دارای محور تقارنی به موازات محور y ها باشد و معادلهٔ محور تقارن را بنویسید.

$ab'-ba'=0 \qquad 4.4-m.1=0 \qquad m=16$

$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{16}{8}=-2$

III ـ شرط آنکه خط $y=\beta$ محور تقارن $y=f(x)$ باشد آن است که $2\beta-y\equiv f(x)$ باشد و این شرط برای تابع $f(x,y)=0$ چنین است:

$f(x,2\beta-y)\equiv f(x,y)$



مثال:

معادلهٔ محور تقارن منحنی $x^2+y^2+x-y=0$ را که با محور طولها موازی است تعیین کنید.

$$f(x,2\beta-y)\equiv f(x,y)$$
$$x^2+(2\beta-y)^2+x-(2\beta-y)\equiv x^2+y^2+x-y$$
$$x^2+4\beta^2+y^2-4\beta y+x-2\beta+y\equiv x^2+y^2+x-y$$

$$\begin{cases}-4\beta+1=-1\\ 4\beta^2-2\beta=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\beta=\frac{1}{2}\\ \beta=0,\frac{1}{2}\end{cases}$$

فقط جواب $\beta=\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

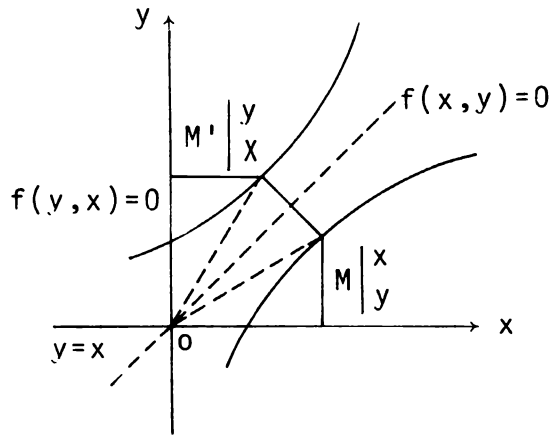
IV ـ شرط آنکه نیمساز ناحیهٔ اول $(y=x)$ محور تقارن منحنی به معادلهٔ $f(x,y)=0$ باشد آن است که:

$$f(x,y)\equiv f(y,x)$$

مثال:

تحقیق کنید نیمساز ناحیهٔ اول محور تقارن منحنی به معادلهٔ $x^2+y^2+xy+x+y+1=0$ است.

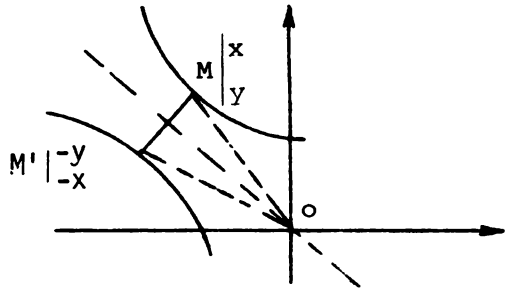
$$f(x,y)\equiv f(y,x)$$



$$x^2+y^2+xy+x+y+1\equiv y^2+x^2+yx+y+x+1$$

شرط آنکه نیمسار ناحیهٔ دوم $(y=-x)$ محورتقارن منحنی به‌معادله $f(x,y)=0$ باشد آن است که:

$f(x,y) \equiv f(-y,-x)$



تقارن منحنی های مثلثاتی

مرکز و محور تقارن منحنی‌های مثلثاتی :

۱ــ تعیین مرکز تقارن منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x$ گیریم $\omega(\alpha,\beta)$ مرکز تقارن منحنی این تابع است ، قرار می‌دهیم :

$$\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases} \qquad \begin{matrix} Y+\beta=\sin(X+\alpha) \\ Y=\sin(X+\alpha)-\beta \end{matrix} \qquad (1)$$

حال اگر در معادلهٔ اخیر با تبدیل X به $-X$، Y به $-Y$ تبدیل شود ، مبداء مختصات جدید یعنی $\omega(\alpha,\beta)$ مرکز تقارن منحنی است و لذا .

$$-Y=\sin(-X+\alpha)-\beta \longrightarrow Y=\sin(X-\alpha)+\beta \qquad (2)$$

ازمقایسهٔ معادلهٔ (2) با معادلهٔ (1) نتیجه می‌شود :

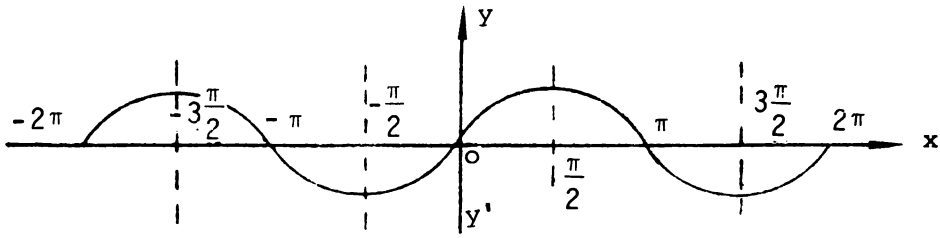
$$\sin(X+\alpha)-\beta=\sin(X-\alpha)+\beta \qquad (3)$$

برای آنکه تساوی در ازاء جمیع مقدارهای X برقرار باشد باید :

$$\sin(X+\alpha)=\sin(X-\alpha)$$
$$-\beta = \beta$$

و درنتیجه $\alpha=k\pi$ ، $\beta=0$ بدست می‌آید .

یعنی منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x$ دارای بینهایت مرکز تقارن است که مختصات آنها $\omega(k\pi,0)$ می‌باشد . $k=\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots$

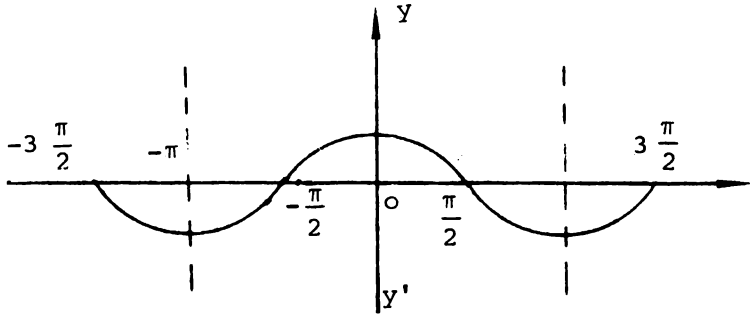


نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}-\pi\\0\end{matrix}\right.$ و $O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix}\right.$ و .....

مرکزهای تقارن منحنی $y=\sin x$ هستند. ω نقطهٔ عطف منحنی نیز می‌باشد. به همین ترتیب معلوم می‌شود که خطهای به معادلهٔ $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ محور های تقارن منحنی می‌باشند.

۲ـ با استدلال مشابهی می‌توان نتیجه گرفت که منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\cos x$ دارای مرکز ومحور تقارن است.

محور تقارن $x=k\pi$ ومرکزتقارن $\omega\left|\begin{matrix}\alpha=(2k+1)\frac{\pi}{2}\\ \beta=0\end{matrix}\right.$ است.



۳ـ تعیین مرکز تقارن منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin^2 x$:

$$y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

نقطه‌های $\left(\frac{2k+1}{4}\pi, \frac{1}{2}\right)$ مراکز تقارن منحنی هستند.

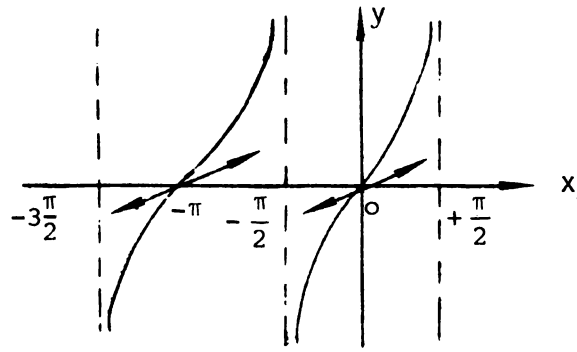
این مختصات را می‌توان با روش معمولی تعیین مختصات مرکز تقارن و یا از روی مختصات مرکز تقارن $y=\cos x$ و مقایسهٔ آن با $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$ نتیجه گرفت.

۴ـ مختصات مرکز تقارن منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x+\cos x$ چنین است: می‌نویسیم

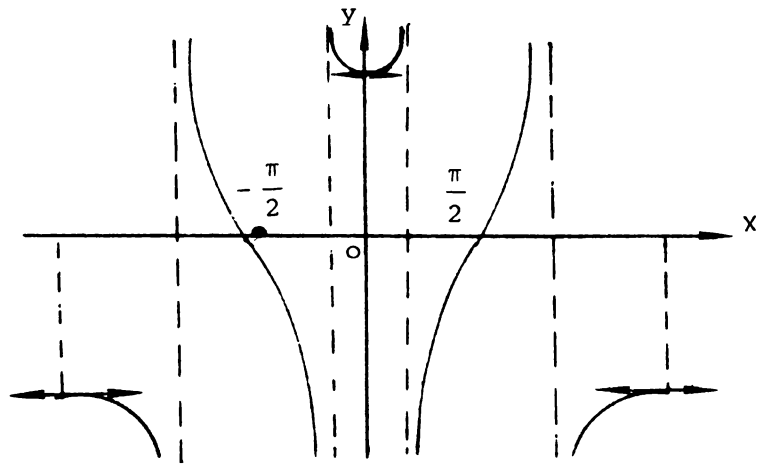
$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

درنتیجه $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$ محورتقارن و نقطه‌های $\omega\left|\begin{matrix}\alpha=k\pi-\frac{\pi}{4}\\ \beta=0\end{matrix}\right.$ مراکز تقارن هستند.

۵ ـ برای منحنی $y=\operatorname{tg} x$ نقطهٔ $\omega(\alpha=k\pi,\ \beta=0)$ مرکز تقارن است.



۶ـ برای منحنی $y=\frac{2\cos x}{4\cos^2 x-3}$ معادلهٔ محورتقارن $x=k\pi$ است .



مجانب

در تابعهای کسری که به صورت $y=\frac{f(x)}{\phi(x)}$ هستند ، هرگاه :

I ــ درجهٔ مخرج از صورت بیشتر یا با آن مساوی‌باشد منحنی مجانب افقی دارد .

II ــ درجهٔ صورت از مخرج یک واحدبیشتر باشد منحنی خط مجانب مایل دارد .

III ــ درجهٔ صورت ازمخرج بیش از یک واحدزیادتر باشد منحنی ،مجانب‌منحنی دارد .

معادله مجانب مایل منحنی تابع $y=\frac{f(x)}{\phi(x)}$ ، برابر است با :

$y=g(x)$

زیرا می‌توان نوشت :

$$y=\frac{f(x)}{\phi(x)}=g(x)+\frac{R(x)}{\phi(x)}$$

و $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{R(x)}{\phi(x)}=0$ ،که درآن $g(x)$ خارج‌قسمت و $R(x)$ باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $\phi(x)$ است .

مثال:

۱) $y=\frac{x^2+4x}{x-2} \longrightarrow y=x+5$ ○ مجانب مایل

۲) $y=\frac{x^4}{x^2-1} \longrightarrow y=x^2+1$ ○ مجانب منحنی (سهمی)

اگر $y=mx+n$ معادلهٔ مجانب مایل باشد دراین صورت :

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}\begin{cases} m\to\infty & \text{شاخهٔ منحنی درامتداد محور } y \text{ ها سهمی‌وار است :} \\ & \text{محور } y \text{ امتداد مجانب است . مجانب مایل‌ندارد .} \\ m=0 & \text{شاخهٔ منحنی در امتداد محور } x \text{ ها سهمی‌واراست .} \\ & \text{محور } x \text{ ها امتداد مجانب است .مجانب‌مایل‌ندارد .} \\ m=a & \text{امتداد مجانب } y=ax \text{ است .} \end{cases}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(y-mx) \longrightarrow \begin{cases} n\to\infty & \text{مجانب مایل ندارد یعنی شاخه منحنی در} \\ & \text{امتداد } y=ax \text{ سهمی‌وار است .} \\ n=b & \text{مجانب مایل } y=ax+b \text{ است .} \end{cases}$$

مثال:

وجود مجانب مایل منحنی توابع زیر را بررسی کنید :

$$(1)\quad y=\sqrt{x^3+1} \longrightarrow \begin{cases} x \longrightarrow +\infty \\ y \longrightarrow +\infty \end{cases} \longrightarrow m=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\to\infty$$

مجانب مایل ندارد .

محور y ها امتداد مجانب است . شاخه منحنی در امتداد محور y ها سهمی‌وار است .

$$(2)\ y=\sqrt{2-x} \longrightarrow \begin{cases} x \longrightarrow +\infty \\ y \longrightarrow +\infty \end{cases} \longrightarrow m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2-x}}{x} \longrightarrow m=0$$

مجانب مایل ندارد ــ امتداد مجانب محور xها است . شاخه منحنی درامتداد محور x ها سهمی‌وار است .

$$(3)\ y=3x+\sqrt{x-1} \longrightarrow \begin{cases} x \longrightarrow +\infty \\ y \longrightarrow +\infty \end{cases} \longrightarrow m=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x-1}}{x}=3$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(3x+\sqrt{x-1}-3x)\to+\infty$$

منحنی تابع مجانب مایل ندارد ولی امتداد مجانب $y=3x$ است یعنی شاخه منحنی در امتداد $y=3x$ سهمی وار است .

III ــ درمورد مقطع مخروطی به معادله $y=\alpha x+\beta\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$ در حالتیکه مقطع هذلولی $(a>0)$ باشد معادله مجانب‌ها به صورت :

$$y=\alpha x+\beta\pm\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

است . " در این حالت باید $b^2-4ac\neq0$ باشد " .

اگر درمعادلهٔ بالا $a=2^2$ باشد ، یکی از مجانب‌ها افقی و دیگری مایل است ودر غیر اینصورت هر دو مجانب مایل می‌باشند .

(۱) ــ در تابعهایی که معادلهٔ آنها به صورت :

$$y=\alpha x+\beta\pm\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+k}$$

باشد $(a\neq0)$ معادله مجانب‌ها به صورت :

$$y=\alpha x+\beta\pm\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)$$

نوشته می‌شوند .

(۲) ــ در منحنی‌های هذلولی که معادلهٔ آنها به صورت

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

ویا $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$ است . معادلهٔ مجانب مایل به صورت

$$\frac{y-\beta}{a}\pm\frac{x-\alpha}{b}=0$$

است .

(۳) ــ در تابعهای $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ خطهای $y=\frac{a}{a'}$ و $x=-\frac{b'}{a'}$ مجانبهای منحنی نمایش تغییرات تابع می‌باشند .

(٤) ــ درتابعهای $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ $(a,a'\neq0)$ ضریب زاویهٔ مجانب مایل

برابر $\frac{a}{a'}$ است.

(۵) ــ در تابعهای به صورت $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=k$ $(k\neq 0)$ خطهای $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ مجانبهای منحنی تابع می‌باشند. "بایدتوجه داشت که دراین حالت باید $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد" اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ باشد، معادلهٔ تابع نسبت به $ax+by$ به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شود و دو خط متوازی رانشان میدهد.

IV ــ تعیین مجانب منحنی تابعهایی که به صورت $f(x,y)=0$ می‌باشد.

برای تعیین امتدادهای مجانب باید مجموع جمله‌های بزرگترین درجه تابع را مساوی‌صفر قرارداد. اگر بعضی‌از این امتدادها موازی‌محورهای مختصات باشد یعنی مجموع جمله های بزرگترین درجه فاکتور x یا y داشته باشد، برای تعیین مجانب مربوط به این امتداد های خاص چنین باید عمل کرد:

فرض می‌کنیم $x=a$ نظیر امتداد $x=0$ باشد. معادله را برحسب y مرتب می‌کنیم و ضریب بزرگترین درجه y را مساوی صفر می‌گیریم a بدست می‌آید. به همین ترتیب برای $y=b$ معادله را برحسب x مرتب می‌کنیم و ضریب بزرگترین درجهٔ x را برابر صفر می‌گذاریم تا b به دست آید. درحالت کلی که امتداد مجانب m است، در معادلهٔ منحنی به جای y مقدار $mx+h$ را می‌گذاریم و ضریب بزرگترین درجه x رامساوی صفر قرار می‌دهیم. از اینجا h عرض از مبداء مجانب مربوط به امتداد m بدست می‌آید.

مثال:

معادلهٔ مجانبهای منحنی به معادلهٔ $x^2+y^2+yx^2-3y^2x=0$ را بدست آورید.

$$x^2y-3xy^2=0 \longrightarrow xy(x-3y)=0$$

امتداد مجانبها:

$$x=0 \qquad y=0 \ , \ y=\frac{x}{3}$$

الف ــ برای تعیین معادلهٔ مجانب موازی با $x=0$ معادله را برحسب y مرتب کرده و می‌نویسیم.

$$(1-3x)y^2+x^2y+x^2=0 \longrightarrow x=\frac{1}{3}$$

ب ــ برای‌تعیین‌معادلهٔ‌مجانب‌موازی‌با $y=0$ می‌نویسیم:

$$(1+y)x^2-3y^2x+y^2=0 \longrightarrow y+1=0$$

و $y=-1$ به دست می‌آید.

ج ــ برای تعیین مجانب موازی با $y=\frac{x}{3}$ می‌نویسیم $y=\frac{x}{3}+h$ و در معادله قرار

می‌دهیم .

$$(\frac{10}{9}-h)x^2+(\frac{2h}{3}-3h^2)x+h^2=0$$

$h=\frac{10}{9}$ و معادلهٔ مجانب مایل به صورت $y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{9}$ به دست می‌آید .

۷ ـ در تابع $y=\frac{f(x)}{\phi(x)}$ وقتی درجهٔ f از ϕ بیشتر است برای تعیین معادلهٔ مجانب مایل یا منحنی به ترتیب زیر عمل کنیم : $f(x)$ را بر $\phi(x)$ بخش می‌کنیم و می‌نویسیم :

$$y=\frac{f(x)}{\phi(x)}=g(x)+\frac{R(x)}{\phi(x)}$$

$y=g(x)$ معادله مجانب است . حال اگر نقاط تلاقی مجانب مایل با منحنی نمایش تغییرات تابع منظور باشد می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} y=\frac{f(x)}{\phi(x)} \\ y=g(x) \end{cases} \longrightarrow \frac{f(x)}{\phi(x)}-g(x)=0 \longrightarrow \frac{R(x)}{\phi(x)}=0$$

پس برای تعیین طولهای این نقاط کافی است معادلهٔ $R(x)=0$ را حل کنیم .

مثال:

نقاط تلاقی مجانب مایل تابع $y=\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+1}$ را با منحنی نمایش تغییرات تابع بدست آورید .

$$\begin{cases} y=\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+1} \\ y=x+2 \end{cases} \xrightarrow{\text{مجانب مایل}} \frac{x^3+2x^2+1}{x^2+1}=x+2+\frac{-x-1}{x^2+1}$$

برای تعیین طولهای نقاط تلاقی مجانب با منحنی می‌نویسیم :

$$-x-1=0 \longrightarrow x=-1 \longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=-1 \\ y=1 \end{array} \right.$$

بررسی تابعهایی به صورت:

$$a'\neq 0 , y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

۱) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ است .

الف ــ اگر مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد تابع ماکزیمم و می‌نیمم ندارد .
ب ــ اگر مخرج دو ریشهٔ حقیقی یا ریشه‌های موهومی داشته **باشد** تابع دارای ماکزیمم یا می‌نیمم است . دراین حالت تابع در ازاء دو مقدار **حقیقی** ریشه‌های مخرج ناپیوسته است .و منحنی نقطهٔ عطف ندارد . اگر تابع پیوسته یعنی "ریشه‌های مخرج موهومی" باشد منحنی دو نقطهٔ عطف دارد .
ج ــ با تحقق شرط (۱) منحنی نمایش تابع دارای محور تقارنی به معادلهٔ $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{b'}{2a'}$ است . این محورتقارن مکان ماکزیمم و می‌نیمم تابع است .

۲) $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ است .

الف ــ اگر مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد تابع ماکزیمم یا می‌نیمم دارد .
ب ــ اگر مخرج ریشهٔ حقیقی نداشته باشد ، تابع ماکزیمم و می‌نیمم دارد همچنین سه نقطه عطف دارد که بر یک استقامت‌اند .
ج ــ اگر مخرج دو ریشه داشته باشد ممکن است تابع ماکزیمم و می‌نیمم داشته باشد یا نه .
د ــ مکان نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع به صورت $y=\frac{2ax+b}{2a'x+b'}$ می‌باشد .
هـ ــ اگر منحنی با خط $y=m$ قطع شود معادلهٔ مکان وسطهای وترها به صورت :

$$y=\frac{2ax+b}{2a'x+b'}$$

است .

۳) در تابع $(a'\neq 0)\ y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ حاصلضرب ماکزیمم و می‌نیمم برابر است با :

$$y_{Max}\cdot y_{Min}=\frac{b^2-4ac}{b'^2-4a'c'}$$

چند مثال:

(۱) تابع $y=\frac{x^2-3x+1}{4x^2-12x+9}$ ماکزیمم و می‌نیمم ندارد .

(۲) تابع $y=\frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5}$ فقط ماکزیمم دارد .

(۳) تابع $y=\frac{x^2+x}{x^2+x-2}$ فقط ماکزیمم دارد .

(۴) تابع $y=\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}$ فقط می‌نیمم دارد .

(۵) تابع $y=\frac{3x^2+2x-5}{x^2+2x+1}$ فقط ماکزیمم دارد .

(۶) تابع $y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$ دارای ماکزیمم و می‌نیمم است .

(۷) تابع $y=\frac{3x^2-4x-4}{x^2-1}$ ماکزیمم و می‌نیمم ندارد .

(۸) درتابع $y=\frac{a}{x^2+x+1}$ خط $x=-\frac{1}{2}$ مکان ماکزیمم و می‌نیمم تابع است .

(۹) درتابع $y=\frac{x^2+x+3}{x^2+3x}$ تابع $y=\frac{2x+1}{2x+3}$ معادله مکان ماکزیمم و می‌نیمم تابع است .

(۱۰) در تابع $y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$: $Y_{Max}\cdot Y_{Min}=\frac{4+12}{4-12}=\frac{16}{-8}=-2$

VI . خاصیت ریشه‌های مکرر :

(1) ــ هرگاه در تابع $y=f(x)$ معادلهٔ $f(x)=0$ شامل ریشهٔ مکرر از مرتبهٔ زوج باشدریشه مضاعف‌طول نقطهٔ ماکزیمم‌و یا می‌نیمم‌خواهد بود .اگر عرض نقطه‌های مجاور این نقطه مثبت باشد نقطهٔ می‌نیمم و اگر منفی‌باشد نقطه ماکزیمم است .

مثال (۱):

در تابع $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ ریشهٔ مضاعف $x=1$ طول نقطهٔ می نیمم است . زیرا در $A(1,0)$ ، $y=0$ کمترین مقدار y را نشان می‌دهدودرازاء سایر مقدارهای x ، $y>0$ است .

مثال (۲):

در تابع $y=(x-2)(x-1)^4$ ریشهٔ‌چهارگانه $x=1$ طول نقطهٔ ماکزیمم‌است زیرادر ازاء $x=1$ مقدار y برابر صفر است و در مجاورت همین نقطه مقدار $y<0$ است .

(2) ــ هرگاه در تابع $y=f(x)$ معادلهٔ $f(x)=0$ شامل ریشهٔ مکرر از مرتبهٔ فرد باشد ، ریشهٔ مکرر طول نقطهٔ عطف منحنی است .

مثال (۱):

در تابع $y=(x+1)^3(x-1)^2x$ ، $x=1$ طول نقطهٔ مینیمم است.
و $x=-1$ طول نقطهٔ عطف است.

۲) در تابع $y=(x+1)^3(x-1)$ ، $x=-1$ طول نقطهٔ عطف است.

مقطعهای مخروطی

معادلهٔ مقطعهای مخروطی چنین است :

$$y=\alpha x+\beta\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$$

(۱) اگر $\alpha=0$ و $a=-1$ باشد ، منحنی این معادله یک دایره است .

مثال:

$y=2\pm\sqrt{-x^2+2x+1}$ که می‌توان آن را به صورت $(x-1)^2+(y-2)^2=2$ نوشت .

(۲) اگر ($\alpha\neq0$ یا $\alpha=0$) و $a<0$ باشد معادله بیضی است .

مثال:

$$y=4x\pm\sqrt{-x^2+4}$$

(۳) اگر ($\alpha\neq0$ یا $\alpha=0$) و $a>0$ باشد . معادله هذلولی است .

مثال:

$$y=x+4\pm\sqrt{x^2+x-4}$$

(۴) اگر ($\alpha\neq0$ یا $\alpha=0$) و $a=0$ و $b\neq0$ باشدمعادله‌سهمی است .

مثال:

$$y=3x\pm\sqrt{4x-1}$$

(۵) اگر زیر رادیکال مجذور کامل باشد . معادله دو خط است .

مثال:

$y=2x-1\pm\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}=2x-1\pm(x+\frac{1}{2})$ دو خط

دونیم خط

$$y=2x-1-\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}=2x-1-|x+\frac{1}{2}|$$

(۶) اگر $c>0$ و $b=0$ و $a=0$ باشد . معادله دو خط متوازی است .

مثال:

$$y=1-x\pm\sqrt{2}$$

(۷) اگر $b^2-4ac=0$ و $a>0$ باشد معادله دو خط متقاطع است .

مثال:

$$y=2x-1\pm\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}=2x-1\pm(x+\frac{1}{2})$$

(۸) اگر $b^2-4ac=0$ و $a<0$ باشد مختصات یک نقطه است .

مثال:

$$y=1-3x\pm\sqrt{4x-x^2-4}=1-3x\pm\sqrt{-(x-2)^2}\longrightarrow A\left|\begin{matrix}2\\-5\end{matrix}\right.$$

الف ــ درمورد حالت هذلولی معادلات مجانب‌ها به صورت :

$$y=\alpha x+\beta\pm\sqrt{a}\,(x+\frac{b}{2a})$$

می‌باشد .

ب ــ مختصات مرکز تقارن مقطعهای مخروطی (دایره ، بیضی ، هذلولی) عبارتست از :

$$S\left|\begin{matrix}-\frac{b}{2a}\\ \alpha(-\frac{b}{2a})+\beta\end{matrix}\right.$$

ج ــ درمورد سهمی معادلهٔ محور تقارن که موازی $y=\alpha x$ است به‌صورت :

$$y=\alpha x+\beta-\frac{b\alpha}{2(\alpha^2+1)}$$

می‌باشد

مثال:

درمورد هذلولی

$$y=4x+3\pm\sqrt{x^2+2x-4}$$

معادله مجانب‌ها به صورت :

$$y=4x+3\pm(x+1)\longrightarrow\left|\begin{matrix}y=5x+4\\ y=3x+2\end{matrix}\right.$$

می‌باشد

و مختصات مرکز تقارن این هذلولی چنین است :

$$S\left|\begin{array}{l}-1\\ 4(-1)+3=-1\end{array}\right.$$

در سهمی $y=3x\pm\sqrt{4x-1}$ معادلهٔ محورتقارن به‌صورت زیر می‌باشد .

$$y=3x-\frac{4(3)}{2(9+1)}=3x-\frac{3}{5}$$

II- معادله مقطعهای مخروطی به صورت تابعهای ضمنی و طرز تشخیص آنها :

معادلهٔ $f(x,y)=0$ که درآن $f(x,y)$ تابع درجهٔ دومی از x و y است نمایش مقاطع مخروطی است .

معادلهٔ کلی مقطع مخروطی $Ax^2+2Bxy+cy^2+Dx+Ey+F=0$

مختصات مرکز تقارن $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$

اگر $B=0$ و $A=C$ باشد . معادله دایره است .

مثال:

$$4x^2-2x+4y^2+5=0$$

اگر $\Delta=B^2-AC>0$ معادله هذلولی است .

مثال:

$$4x^2+8xy-y^2-4x-2y-27=0$$
$$\Delta=16+4=20>0$$

اگر $\Delta<0$ باشد معادله بیضی است .

مثال:

$$4x^2+2xy+8y^2-2x-19y+1=0$$
$$\Delta=1-32=-31<0$$

اگر $\Delta=0$ باشد معادله سهمی است .

مثال:

$$x^2-8x+y^2+2y-2xy-10=0$$
$$\Delta=1-1=0$$

معادلهٔ محور تقارن سهمی (حالت $\Delta=0$) عبارت است از:

$$\begin{cases} Af'_x(x,y)+Bf'_y(x,y)=0 \\ B\neq 0 \end{cases}$$

اگر Δ در معادلهٔ درجه دوم حاصل از معادلهٔ مقطعهای مخروطی بر حسب x و یا y مجذور کامل باشد، معادله به معادلهٔ دو خط راست تجزیه می‌شود.

مثال:

$$3x^2-4xy+y^2+4x-4=0$$

هذلولی $\Delta=4-3=1>0$

$$y^2-4xy+3x^2+4x-4=0$$

$$y=2x\pm\sqrt{4x^2-(3x^2+4x-4)}=2x\pm\sqrt{x^2-4x+4}=2x\pm(x-2)$$

دو خط $y=3x-2 \quad , \quad y=x+2$

همچنین اگر Δ مقدار ثابتی باشد (مستقل از x و یا y و $\Delta>0$) معادله مقطـــع مخروطی به دو خط تجزیه می‌شود.

مثال:

$$x^2-4xy+4y^2-2x+4y-2=0$$

$$4y^2-4(x-1)y+x^2-2x-2=0$$

سهمی $\Delta=4-1 \cdot 4=0$

$$y=\frac{2(x-1)\pm\sqrt{4(x-1)^2-4(x^2-2x-2)}}{4} \longrightarrow$$

$$y=1/2(x-1\pm\sqrt{3})$$

اگر معادلهٔ یک منحنی به صورت $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0$ باشد، این معادله دو خط D و D' را نشان می‌دهد. اگر این دو خط بر هم عمود باشند باید $-\frac{a}{b}\cdot-\frac{a'}{b'}=-1$ باشد یعنی: $aa'=-bb'$

بنابراین:

$$aa'x^2+ba'xy+ca'x+ab'xy+bb'y^2$$
$$+cb'y+ac'x+bc'y+cc'=0$$

ویا $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

اگر معادلهٔ کامل درجه دوم دو مجهولی را نسبت به x و یا y حل کنیم و زیر رادیکال مربع کامل باشد ، در صورتیکه $A=-C$ باشد ، این معادله ،معادله دو خط عمود بر هم را نشان می‌دهد .

حالت خاص:

در معادلات ناقص درجه دوم دو مجهولی به صورت : $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$ (معادلهٔ همگن) هرگاه $A=-C$ باشد همواره معادله دو خط عمود برهم را نشان می‌دهد .

$A=-C$

$Ax^2+2Bxy-Ay^2=0 \longrightarrow$

$$x=\frac{-2By\pm\sqrt{4B^2y^2+4A^2y^2}}{2A}=\frac{-By\pm y\sqrt{B^2+A^2}}{A}$$

ویا $Ax=y(-B+\sqrt{B^2+A^2})$, $Ax=y(-B-\sqrt{B^2+A^2})$

$$m.m'=\frac{B+\sqrt{B^2+A^2}}{A}\cdot\frac{B-\sqrt{B^2+A^2}}{A}=\frac{B^2-B^2-A^2}{A^2}=-1$$

تعیین نزدیکترین و دورترین فاصله یک منحنی از مبدأ مختصات

چند مثال:

مثال (۱):

نزدیکترین فاصلهٔ منحنی تابع $y=2x^2-3$ را از مبداء مختصات تعیین کنید.

حل:

فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ واقع بر منحنی تابع را از مبداء مختصات حساب می‌کنیم و باتوجه به معادلهٔ منحنی به دست می‌آوریم:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{y+3}{2}+y^2}$$

اکنون می‌نیمم d رابا استفاده از مشتق محاسبه می‌کنیم:

$$d'_y=\frac{\frac{1}{2}+2y}{2\sqrt{\frac{y+3}{2}+y^2}}$$

$$d'_y=0 \longrightarrow y=-1/4$$

$$d_{Min}=\sqrt{\frac{-1/4+3}{2}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{23}}{4}$$

مثال (۲):

نزدیکترین فاصلهٔ منحنی تابع $y^2=x+4$ را از مبداء مختصات تعیین کنید.

حل: داریم:

$$M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \qquad d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x+4}$$

مانندمثال (۱) می‌توان از راه مشتق به نتیجه رسید. راه دیگر چنین است:

در تابعهای درجه دوم به صورت $y=ax^2+bx+c$ مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم عبارت است از:

$$\frac{4ac-b^2}{4a}$$

که‌برای $a>0$ می‌نیمم‌وبرای $a<0$ ماکزیمم‌رامیدهد.
ونزدیکترین فاصله برای مثال (۲) چنین است:

$$d=\sqrt{x^2+x+4}$$

$$d_{Min}=\sqrt{\frac{4.1.4-1}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

مثال (۱):

نزدیکترین و دورترین فاصله منحنی تابع $x^2+4y^2=4$ را از مبداء مختصات تعیین کنید.

حل:

فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ واقع بر منحنی را از مبداء مختصات حساب می‌کنیم، داریم:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4-4y^2+y^2}=\sqrt{4-3y^2}$$

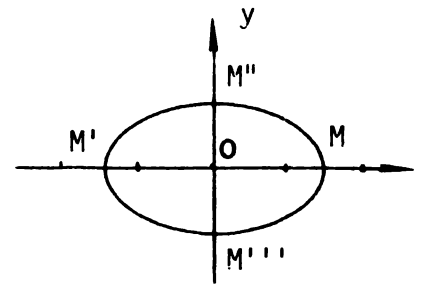
$$d_{max}\longrightarrow y=0 \qquad d_{max}=2$$

برای داشتن حداقل d، باید عبارت $4-3y^2$ حداقل مقدار خود را اختیارکند یعنی y باید حداکثر باشد. و لذا باید ابتدا به حدود تغییرات y توجه داشت.

$$x^2=4-4y^2\geqslant 0 \longrightarrow -1\leqslant y\leqslant 1$$

$$d_{Min}\longrightarrow y=1 \qquad d_{Min}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$



مثال (۲):

نزدیکترین فاصله منحنی تابع $y=1\pm\sqrt{x^2-1}$ را ازمبداء مختصات تعیین کنید.

حل:

$$M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \quad d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(y-1)^2+1+y^2}=\sqrt{2y^2-2y+2}$$

$$d_{Min}=\sqrt{\frac{4.2.2-4}{4.2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

تابعهای متناوب

I ــ تابع متناوب ــ دوره تناوب

(۱) ــ تابع $y=f(x)$ را متناوب‌گویند هرگاه عددی مانند a $(a\neq 0)$ به قسمی وجود داشته باشد که با افزودن a و تمام مضربهای صحیح a یعنی ka $(k$ عددی است صحیح مثبت یا منفی) به متغیر x ، مقدار تابع فرق نکند. یعنی:

$$y=f(x)=f(x\pm a)=f(x\pm 2a)=\cdots\cdots=f(x\pm ka)$$

اگر a کوچکترین عدد مثبتی باشد که درتعریف بالا صدق کند، a را دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ گویند. مثلاً $y=\sin x$ تابعی است متناوب و دورهٔ تناوب آن 2π است زیرا:

$$y=\sin x=\sin(x+2\pi)=\sin(x+4\pi)=\ldots=\sin(x+2k\pi)$$

و همچنین $\cos x$ متناوب بوده و دورهٔ تناوب آن 2π است.

(۲) دورهٔ تناوب هریک از تابعهای tgx و $Cotgx$ برابر π است.

دورهٔ تناوب هریک از تابعهای: $\sin nx$ و $\cos nx$ و $tgnx$ و $Cotgnx$ به ترتیب برابر با $\frac{2\pi}{n}$ و $\frac{2\pi}{n}$ و $\frac{\pi}{n}$ و $\frac{\pi}{n}$ می‌باشد.

(۳) ــ اگر یک تابع متناوب متشکل از چند تابع متناوب دیگر بوده و هریک، از آنها دورهٔ تناوب مخصوصی داشته باشد دورهٔ تناوب این تابع متناوب کوچکترین عددی است که مضرب صحیح هریک از دوره‌های تناوب تابعهای تشکیل‌دهنده آن تابع باشد.

مثال:

دوره تناوب تابع $y=3\sin\frac{x}{2}-5\cos\frac{3x}{4}+tg\frac{2}{3}x+1$ چنین تعیین میشود:

دورهٔ تناوب $\sin\frac{x}{2}$: $\frac{2\pi}{1/2}=4\pi$

دورهٔ تناوب $\cos\frac{3x}{4}$: $\frac{2\pi}{3/4}=\frac{8\pi}{3}$

دورهٔ تناوب $tg\frac{2}{3}x$: $\frac{\pi}{2/3}=\frac{3\pi}{2}$

این دوره‌های تناوب کسری را به یک مخرج تبدیل می‌کنیم، داریم:

$\frac{9\pi}{6}$, $\frac{16\pi}{6}$, $\frac{24\pi}{6}$ کوچکترین عددی که مضرب صحیح هریک‌ازعددهای

$\frac{9\pi}{6}$, $\frac{16\pi}{6}$, $\frac{24\pi}{6}$

باشد عبارت است از $144\frac{\pi}{6}$ که در آن عدد 144 ک.م.م عددهای 24 و 16 و 9 یعنی صورت‌کسرهامی‌باشد. پس‌دورهٔ تناوب تابع داده شده برابر 24π می‌باشد. فایدهٔ دورهٔ تناوب در تعیین فاصله‌ای است که باید متغیر تغییر کند تا تغییرات تابع معلوم شود، مثلا" برای تابع‌ذکر شده کافی است متغیر x را در فاصله‌ای به اندازهٔ 24π تغییرداد، البته مبداء این فاصله کاملا" اختیاری است، می‌توان از صفر تا 24π ، یااز $-\pi$ تا 23π ویااز $\frac{5\pi}{6}$ تا $24\pi+\frac{5\pi}{6}$ یا ..... آنرا انتخاب کرد.

(۴) وقتی‌که‌سینوس‌یاکسینوس‌دارای‌توان زوج باشد، دورهٔ تناوب‌آن نصف می‌شود، زیرا:

$$\sin^{2n}x=(\sin^2x)^n=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^n$$

$$\cos^{2n}x=(\cos^2x)^n=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n$$

مثلا" دورهٔ تناوب $\sin^4 3x$ ، $\frac{\pi}{3}$ می‌باشد زیرا دوره تناوب $\sin 3x$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ و بمناسبت توان زوج دوره تناوب نصف شده است.

(۵) در بعضی از تابعهای مثلثاتی که قابل تبدیل به تابعهای دیگر باشند، ممکن است پس از تبدیل دورهٔ تناوب دیگری بدست آید که از کوچکترین دورهٔ تناوب بدست آمدهٔ قبلی‌کوچکتر باشد.

مثلا" در تابع:

$$y=\frac{2\sin x-3\cos x}{4\cos x}$$

دورهٔ تناوب 2π بدست‌می‌آید درحالی که می‌توان نوشت:

$$y=\frac{2\sin x}{4\cos x}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x-\frac{3}{4}$$

ودر نتیجه کوچکترین دورهٔ تناوب تابع‌اخیر π می‌باشد:

همچنین درتابع $y=\operatorname{cotg}2x-\operatorname{tg}2x$ دورهٔ تناوب $\frac{\pi}{2}$ بدست می‌آید در حالی که کوچکترین دورهٔ تناوب این تابع $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد زیرا:

$$y=\frac{1}{\operatorname{tg}2x}-\operatorname{tg}2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 2x}{\operatorname{tg}2x}=2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}4x}\right)=2\operatorname{cotg}4x$$

(۶) ــ هر تابع که شامل یک قسمت مثلثاتی و یک قسمت جبری از متغیر x است

متناوب نیست. مثل تابع $y=1+x+\sin x$ زیرا: اگر تابع را متناوب فرض کنیم کوچکترین دورهٔ تناوب برای $\sin x$ برابر 2π می‌باشد ولذا مضربهای دورهٔ تناوب تابع " به فرض وجود " برابر است با $K.2\pi$ (K عددی صحیح و مخالف صفر) و بنا بر تعریف تابع متناوب باید داشته باشیم:

$$y=1+x+\sin x=1+x+2K\pi+\sin(x+2K\pi)=\cdots\cdots$$

چنانکه ملاحظه می‌شود:

$$1+x+\sin x=1+x+2K\pi+\sin x$$

این تساوی برقرار نیست مگر برای $K=0$، یعنی تابع داده شده متناوب نمی‌باشد. همچنین تابعهایی مانند $\sin x^2$ و $tg\sqrt[3]{x}$ و $\cos\frac{3}{x}$ (تابعهایی که کمان متغیر دارای قوه باشد) متناوب نمی‌باشند زیرا اگر تابع $y=\sin x^2$ را متناوب فرض کنیم و کوچکترین دورهٔ تناوب آن a باشد طبق تعریف دورهٔ تناوب باید داشته باشیم:

$$y=\sin x^2=\sin(x+a)^2=\sin(x+2a)^2=\cdots=\sin(x+Ka)^2$$

و لذا:

$$(1)\quad x^2=2K'\pi+(x+Ka)^2$$
$$(2)\quad x^2=2K'\pi+\pi-(x+Ka)^2$$

ویا:

$$(1)\quad x^2=2K'\pi+x^2+2Kax+K^2a^2\longrightarrow 2K'\pi+2Kax+K^2a^2=0$$

از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که باید $K.a=0$ چون بنا بر تعریف تناوب مقدار متغیر x در تناوب تابع موثر نمی‌باشد " اما $a=0$ ویا $K=0$ هر دو مغایر با تعریف تناوب است ولذا فرض متناوب بودن تابع رد می‌شود. همین نتیجه از رابطهٔ (2) نیز حاصل می‌شود.

(۷)ـ دوره تناوب تابعهایی از قبیل $\sin\frac{\pi}{4}x$ و $\cos\frac{\pi}{6}x$ عبارت است از $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$ و $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$ یعنی برای تعیین تغییرات تابع $y=\sin\frac{\pi}{4}x$ باید متغیر x را در فاصله‌ای به اندازهٔ 8 (8 واحد اختیار شده) تغییر داد.

(۸) در تابعهای مثلثاتی که به صورت حاصلضرب چند عبارت باشند، بهتر است برای تعیین کوچکترین دورهٔ تناوب ابتداء آنها را به صورت حاصل جمع در آورده و سپس دوره تناوب را تعیین کرد.

مثلاً " دورهٔ تناوب تابع $y=3\sin x.\cos 3x-1$ برابر 2π بدست می‌آید درحالی که اگر به مجموع تبدیل شود، داریم:

$$y=\frac{3}{2}[\sin 4x+\sin(-2x)]-1=\frac{3}{2}\sin 4x-\frac{3}{2}\sin 2x-1$$

و از آنجا دورهٔ تناوب آن برابر π به‌دست می‌آید .

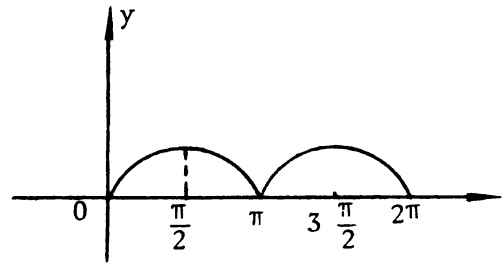
II ـ منحنی نمایش تغییرات تابعهای مثلثاتی که به صورت قدرمطلق نوشته‌می‌شوند .

مثال (۱):

برای تعیین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=|\sin x|$ می‌نویسیم :

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x \ , & \sin x \geqslant 0 \longrightarrow 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ -\sin x \ , & \sin x < 0 \longrightarrow \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

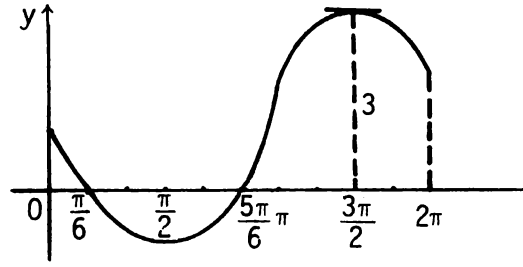
بنابراین اگر متغیر x را در فاصلهٔ 0 تا 2π تغییر دهیم‌منحنی زیر نتیجه‌می‌شود پس دورهٔ تناوب این تابع برابر π می‌باشد .



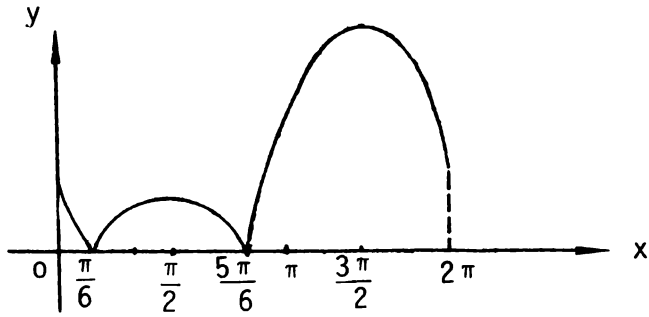
این مطلب ناشی از آن است که منحنی نمایش تابع $y=\sin x$ در یک دورهٔ تناوب "مثلا" از 0 تا 2π "از دوقسمت قرینه نسبت به‌مرکز تقارن $O'(\pi,0)$ تشکیل شده (ثابت می‌شود که منحنی $\sin x$ دارای بینهایت مرکز تقارن می‌باشد که مختصات آنها $(k\pi,0)$ است) .
بنابراین برای یافتن منحنی نمایش $y=|\sin x|$ از روی منحنی $y=\sin x$ باید قرینهٔ قسمت واقع درزیر محور $x'x$ را نسبت به‌محور افقی بیابیم و وقتی منحنی واقع در زیر محور x ها به بالای آن منتقل می‌شود (قرینه آن نسبت به محور x ها) درست شکل رسم‌شده در فاصله 0 و π تکرار می‌شود و لذا دورهٔ تناوب نصف می‌شود .

مثال (۲):

منحنی نمایش تغییرات $y=1-2\sin x$ به شکل زیر است .



حال اگر منحنی نمایش تغییرات $y=|1-2\sin x|$ در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ مطلوب باشد باید قسمتی از منحنی را که در زیر محور xهاواقع‌است‌به قرینهٔ آن نسبت به محور x ها تبدیل کرد یعنی داریم :



دورهٔ تناوب این تابع 2π می‌باشد که با دورهٔ‌تناوب $y=1-2\sin x$ برابر است و علت آن است که قسمتی از منحنی $1-2\sin x$ که در زیر محور x ها قرار دارد با قسمتی که در بالای محور واقع است متقارن نمی‌باشد و لذا می‌توان نتیجه گرفت :

اگر منحنی نمایش تغییرات تابع مثلثاتی $f(x)$ در یک دوره تناوب از دو قسمت متقارن نسبت به " مرکز تقارن واقع بر محور xها " تشکیل‌شده باشدمنحنی نمایش $|f(x)|$ دارای دورهٔ تناوبی‌مساوی با نصف دورهٔ تناوب $f(x)$ است‌و درغیر این صورت دورهٔ تناوب تغییر نمی‌کند .

برای تعیین دورهٔ تناوب تابعهایی مانند $|\sin x|$ و $|1-2\sin x|$ و نظائرآن در سئوالهای تستی می‌توان چنین‌عمل کرد .

می‌نویسیم : $|\sin x|=\sqrt{\sin^2 x}$

و دورهٔ تناوب $\sqrt{\sin^2 x}$ برابر π می‌باشد . همچنین تابع

$$|1-2\sin x|=\sqrt{(1-2\sin x)^2} \quad \text{یا} \quad \sqrt{1-4\sin x+4\sin^2 x}$$

دارای دورهٔ تناوب 2π می‌باشد .

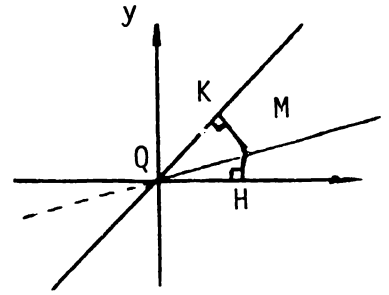
مکان هندسی

چند مثال ازمکان هندسی:

(۱)ــ نقطهٔ M در صفحه زاویهٔ قائمه xOy چنان تغییر مکان می‌دهد که همواره نسبت فاصله‌های این نقطه از یک ضلع و نیمساز آن زاویه ، برابر $\frac{۲}{۳}$ است . مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید .

حل:

داریم : $\frac{MH}{MK} = \frac{2}{3}$ " ضلع زاویهٔ ذکر شده در صورت مسئله OH اختیار شده است . "



$MH = y_M$ و MK فاصلهٔ نقطه M از نیمساز ناحیهٔ اول است . درنتیجه ،

$MK = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$. با توجه به آنکه نقطهٔ زیر نیمساز ناحیهٔ اول و بالای محور x ها است داریم :

$|x-y| = x-y \quad و \quad x > y > 0$

پس

$$MK = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \ , \ \frac{y}{\frac{x-y}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{3} \longrightarrow (3+\sqrt{2})y = \sqrt{2}x$$

رابطهٔ اخیر بین مختصات نقطهٔ M برقرار است * و این رابطه که همان معادلهٔ مکـان هندسی نقطهٔ M **می‌باشد** خط راستی رانشان می‌دهد که از مبداء مختصات می‌گذرد. امـا توجه به این نکته لازم است که مکان مورد نظر نیمخط به مبداء O واقع در داخل زاویـهٔ xOy می‌باشد .

(۲) ــ مکان هندسی نقطهٔ $M(2\mathrm{Cosec}\alpha \ , \ \mathrm{Sin}\alpha + \mathrm{Cosec}\alpha)$ را وقتی که α در فاصلهٔ $]0, \pi[$ تغییر می‌کند ، تعیین‌کنید .

حل:

داریم :

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{2}{\mathrm{Sin}\alpha} \\ y = \mathrm{Sin}\alpha + \frac{1}{\mathrm{Sin}\alpha} \end{array} \right. \longrightarrow \mathrm{Sin}\alpha = \frac{2}{x} \longrightarrow y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} \longrightarrow y = \frac{x^2+4}{2x}$$

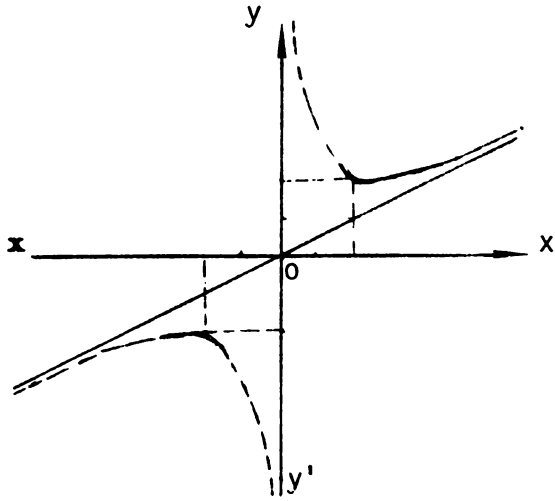
---

* هر نقطه مانند M که این خاصیت را دارد بر روی" نیم‌خط" OM واقع است و هـر نقطه از " نیم خط " دارای این خاصیت است .

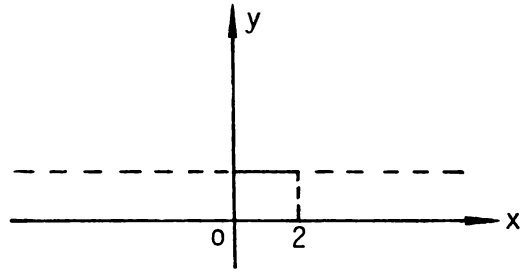
رابطهٔ اخیر بین مختصات نقطهٔ M برقرار است و این رابطه همان معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M می‌باشد که یک هذلولی است .

این تابع به صورت $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ می‌باشد . " اما باید توجه داشت که تمام نقطه‌های منحنی، مکان مورد نظرنمی‌باشد ،بلکه آن‌قسمت از منحنی متعلق به مکان است‌که درآن $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$ می‌باشد . "زیرا در فاصلـــهٔ تعیین شده داریم :

$$\text{"}\ \sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} \geqslant 2 \text{ و } \frac{2}{\sin\alpha} \geqslant 2$$



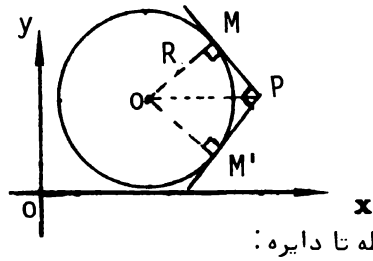
(۳) مکان هندسی نقطهٔ $M(1+\sin\alpha, 2)$ ، پاره خطی است واقع بر روی خط $y=2$ محصور بین $0,2$.



(۴) مکان هندسی نقطه‌هایی که از آنها دو مماس عمود بر هم بر دایره (O و R) رسم‌شود ، دایره‌ای است به مرکز دایره اول و شعاع $R\sqrt{2}$

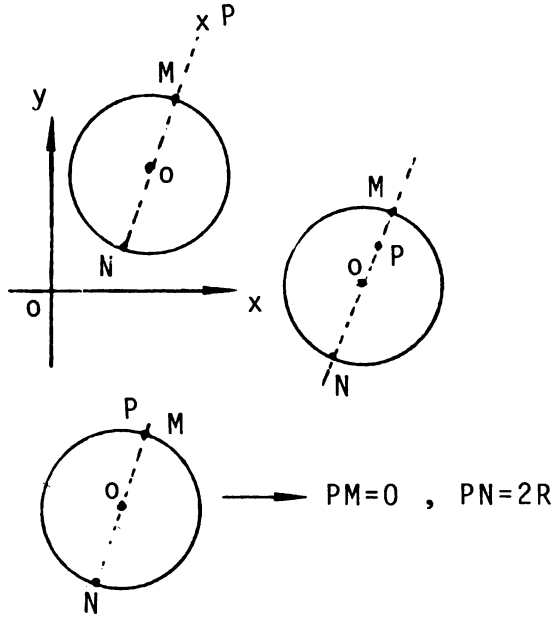
$OM=MP=R$

$OP=R\sqrt{2}$



(۵) فاصلهٔ نقطه تا دایره:

برای تعیین فاصله نقطهٔ P "واقع در صفحه دایره" تا دایره، قطری از دایره را که از نقطه P می‌گذرد رسم کرده، اندازهٔ پاره‌خطهای PM و PN را به ترتیب کوچکترین و بزرگترین فاصلهٔ نقطهٔ P تا دایره می‌نامند.



بررسی کوتاه درمورد تابع پله‌ای:

تعریف تابع پله‌ای: گیریم تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ تعریف شده است، اگر بتوانیم فاصلهٔ $]a,b[$ را بانقاطی مانند

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$$

به فاصله‌های جزئی کوچکتر طوری تقسیم کنیم به طوری که مقدار تابع $f(x)$ در هر فاصلهٔ $]x_{k-1},x_k[$ برابر مقدار ثابت C_k باشد، دراین صورت تابع $f(x)$ را در فاصلهٔ $]a,b[$ یک تابع پله‌ای می‌نامند.

ساده‌ترین و مشهورترین نوع تابع پله‌ای، تابع جزء صحیح است که با $[x]$ یا $E(x)$

نمایانده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود :

تابع جزء صحیح X

مقصود از $[x]$ یا $E(x)$ بزرگترین عدد درست کوچکتر یا برابر x است. یعنی اگر $n \leq x < n+1$ ، آنگاه $E(x)=n$ است.

به عنوان مثال:

برای $-4 \leqslant x < -3$, $[x]$ برابر با -4 است.

برای $-3 \leqslant x < -2$, $[x]$ برابر با -3 است.

برای $-2 \leqslant x < -1$, $[x]$ برابر با -2 است.

برای $-1 \leqslant x < 0$, $[x]$ برابر با -1 است.

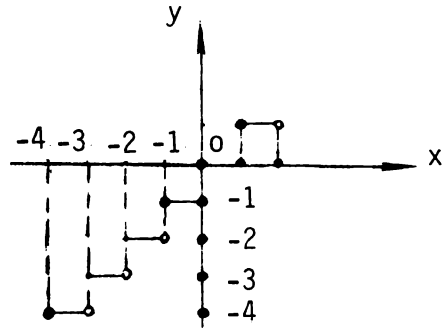
برای $0 \leqslant x < 1$, $[x]$ برابر با صفر است.

برای $1 \leqslant x < 2$, $[x]$ برابر با یک است.

تابع $y=[x]$ را تابع جزء صحیح x می‌نامند و این تابع مثالی از تابع پلـــه‌ای است.

(۱) نمودار تابع $y=[x]$ در فاصله (۲ و ۴ـ) به صورت زیر است.

این تابع به ازاء مقدارهای درست x گسسته است.



چند رابطه درتابع پله‌ای:

(۱)ـ اگر $x \notin Z$ " Z مجموعهٔ عددهای درست نسبی" باشد می‌توان‌نوشت :

$$P \leqslant x < P+1 \Longrightarrow [-x]=-1-[x]$$

(۲)ـ اگر $x \in Z$ باشد :

$$[-x]=-[x] \quad \text{یا} \quad [-x]+[x]=0$$

مثال:

$y=[x]+[-x]$ وقتی که $-3 \leqslant x < -2$ است‌برابراست‌با :

$y=[x]+[-x]=[x]-1-[x]=-3-1-(-3)=-1$

وقتی که $x=2$ است برابر است با :

$y=[x]+[-x]=2+(-2)=0$

(۳)ـ اگر $x<a$ ، می‌توان نوشت : $[x]<a$

(۴)ـ اگر $n\varepsilon z$ باشد : $[x+n]=[x]+n$

(۵)ـ چند صورت یک نامساوی : $[x]\leqslant x<[x]+1$

$x-1<[x]\leqslant x$

$0\leqslant x-[x]<1$

مثال :

نمودار تابع $f(x)=E(x)+[x-E(x)]^2$ را رسم کنید .

حل :

چون $f(x+1)=E(x+1)+[x+1-E(x+1)]^2=E(x)+1$

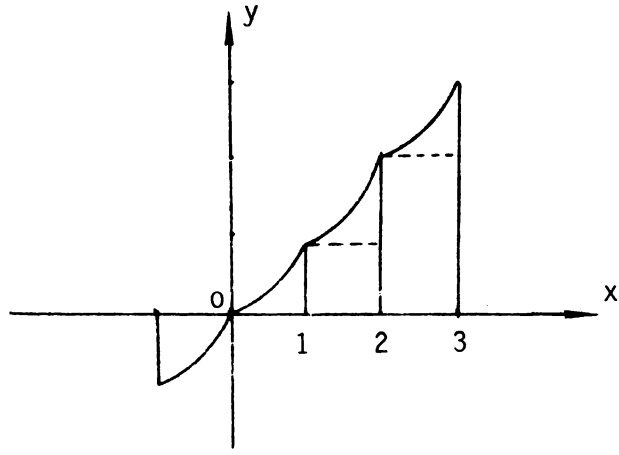
$+[x+1-E(x)-1]^2=E(x)+1+[x-E(x)]^2=f(x)+1$

بنابراین کافی است برای رسم نمودار این تابع ، آن را مثلاً" در فاصلهٔ $0\leqslant x<1$ رسم کرده و شکل حاصل را به موازات نیمساز ناحیهٔ اول به اندازهٔ $\sqrt{2}$ انتقال داد .

به‌ازاء $0\leqslant x<1$ شاخه منحنی ، نظیر با قطعه‌ای از سهمی $y=x^2$ است .

$0<x<1 \longrightarrow f(x)=E(x)+[x-E(x)]^2=x^2$

ونمودار تابع به شکل زیر است :



برای رسم نمودار تابع $y=[f(x)]$ ، ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم

می‌کنیم سپس خطوط افقی $y=k$ $k\in Z$ را نیز رسم می‌کنیم . قطعهٔ منحنی تابع $y=f(x)$ واقع بین دو خط افقی متوالی را روی خط افقی به عرض کوچکتر تصویر می‌کنیم.

چند یادآوری

I- نمایش هندسی تابعهایی به صورت کلی:

$$y=|ax+b|+|a_1x+b_1|+\dots+|a_nx+b_n|$$

خط شکسته‌ای است که از $n-1$ پاره خط و دو نیم خط تشکیل شده است .

II- دو خط متوازی به معادله‌های :

$$\begin{cases} y=mx+n \\ y=mx+n' \end{cases}$$

داده شده است معادله مکان هندسی نقطه‌های متساوی‌الفاصله از دو خط مفروض برابر است با :

$$y=mx+\frac{n+n'}{2}$$

III- فاصلهٔ دو خط متوازی به معادله‌های بالا برابر است با :

$$d=\frac{|n-n'|}{\sqrt{m^2+1}}$$

IV- مکان هندسی نقطه‌هائی از صفحه که مختصات آنها درنامساوی $|x-a|<b$ ویا $|y-a|<b$ صدق می‌کند نقاط درون یک نوار است که به ترتیب موازی محور yها ویا موازی محور xها می‌باشد . مکان هندسی نقطه‌هائی از صفحه که مختصات آنهادر نامساویهای $|y-a|<b$ و $|x-a|<b'$ صدق می‌کند نقاط درون یک مستطیل است .

" درحالت خاص $b=b'$ مستطیل به مربع تبدیل می‌شود . "

مثال:

$|x+2|<3$:

(1) $x+2\geqslant 0$ $x\geqslant -2 \longrightarrow |x+2|=x+2 \longrightarrow x+2<3 \longrightarrow$
$x<1 \longrightarrow -2\leqslant x<1$

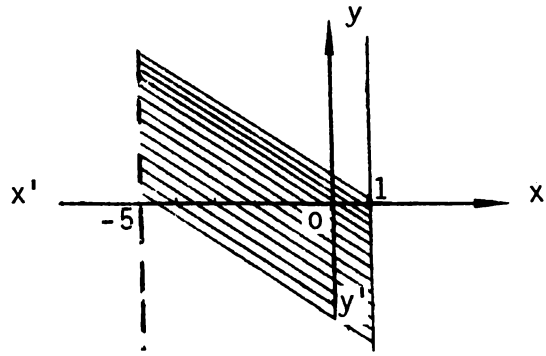
(2) $x+2<0$ $x<-2 \longrightarrow |x+2|=-(x+2) \longrightarrow x+2>-3$
$\longrightarrow x>-5 \longrightarrow -5<x<-2$

ویا $-5<x<1$

بطور خلاصه می‌توان از نامعادلهٔ $|x+2|<3$ نتیجه گرفت .

$-5<x<1$

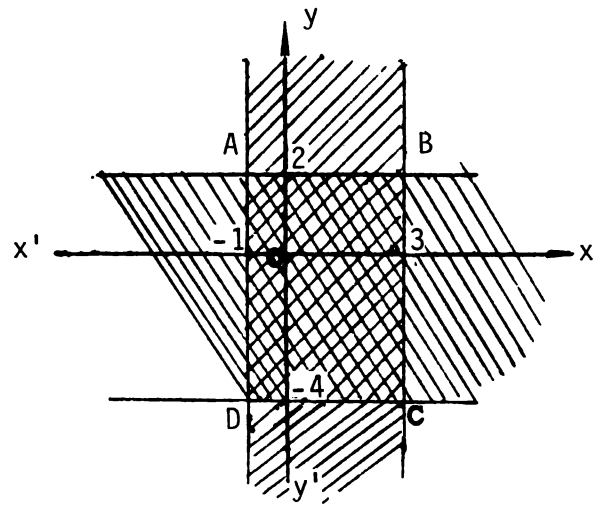
نمایش مکان هندسی نقاطی از صفحهٔ مختصات که درنامعادلهٔ $|x+2|<3$ صدق می‌کنند چنین است:



نمایش مکان هندسی نقاطی از صفحه که درنامعادله‌های $|x-1|<2$, $|y+1|<3$ صدق می‌کنند، چنین است.

$-1<x<3$

$-4<y<2$



مستطیل ABCD مکان هندسی مطلوب است.

V- درعبارت $y=\dfrac{a^n+b^n}{a^{n+k}+b^{n+k}}$ بافرض آنکه $(n,k\in N, a>b)$

وقتی که $n\longrightarrow\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} y=\dfrac{1}{a^k}$

VI- حد عبارت $\dfrac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$ وقتی که $n\longrightarrow\infty$, $(P\in N)$ برابر است با:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}\right)=\frac{1}{p+1}$$

درستی این برابری با استفاده از تعریف انتگرال معین ثابت می‌شود .

VII- در رفع ابهام از تابعهایی به صورت .

$$y=\sqrt[p]{x^p+ax^{p-1}+\dots}-\sqrt[q]{x^q+bx^{q-1}+\dots}$$

وقتی که $x\to\infty$ و به‌صورت مبهم $\infty-\infty$ در می‌آیند از دستور

$$\lim_{x\to\infty}y=\frac{a}{p}-\frac{b}{q}$$

می‌توان استفاده کرد .

(p و q عددهای درست و مثبت و بزرگتر از یک هستند) .

مثال :

$$\lim_{x\to\infty}y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-2x^2-1}=0-\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

VIII- به خاطر سپردن چند حد زیر به سرعت انجام محاسبه کمک می‌کند :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)=1 \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{bx}\right)=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{\sin bx}\right)=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}ax}{bx}\right)=\frac{a}{b},\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}ax}{\operatorname{tg}bx}\right)=\frac{a}{b},\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}ax}{\sin bx}\right)=\frac{a}{b}$$

IX- وقتی که $x\to 0$ می‌توان نوشت . $x\cdot\sin x\sim x^2$

($\sim$ علامت معادل است با)

X ـ فرمول بسط دو تابع مثلثاتی:

بسط Sinx و Cosx به صورت زیر می‌باشد :

$$1)\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

$$2)\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

مقصود از $n!$ (فاکتوریل n) حاصلضرب $n(n-1)(n-2)\times\dots\times 2\times 1$

می‌باشد . از بسطهای بالا برای تسریع در تعیین جوابهای بعضی از مسئله‌ها می‌توان استفاده کرد .

مثال:

حد $\frac{1-x^2/2-\cos x}{x^4}$ وقتی‌که $x \to 0$ برابر است با :

۱ـ یک ۲ـ صفر ۳ـ بی نهایت ۴ـ $-\frac{1}{24}$

حل (۱):

با استفاده از بسط $\cos x$ داریم :

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{x^4} = \underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{1-\frac{x^2}{2}-(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots)}{x^4}$$

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{-\frac{x^4}{4!}+\cdots}{x^4} = -\frac{1}{24}$$

حل (۲):

با استفاده از دستور هوپیتال " HOPITAL" داریم :

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{x^4} = \underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{-\frac{1}{2}.2x+\sin x}{4x^3} = \underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{-1+\cos x}{12x^2} =$$

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{-\sin x}{24x} = -\frac{1}{24}$$

XIـتعیین ماکزیمم حاصلضرب دو عامل متغیر مثبت که مجموع آنها مقداری ثابت ولی تساوی دو عامل ممکن نمی‌باشد .

مثال:

مطلوب است تعیین ماکزیمم

$P=2(\sin x+4)(3-2\sin x)$

$s=2\sin x+8+3-2\sin x=11$

$d=2\sin x+8-(3-2\sin x)=4\sin x+5$

چنانکه ملاحظه می‌شود d برابر صفر نمی‌شود . اما کمترین مقدار این تفاضل وقتی است‌که $\sin x=-1$ باشد .

$d_{Min}=4(-1)+5=1$

دراینصورت : $P_{Max}=2(-1+4)(3+2)=30$

XII- در بحث مقطعهای مخروطی ملاحظه شد که معادلهٔ :

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ دایره می‌باشد ، که درآن

$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ شعاع و $\omega(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ مرکز دایره است .

(۱) اگر $a^2+b^2-4c=0$ باشد ، دایره به یک نقطه تبدیل می‌شود که همان "مرکز دایره" است .

(۲) معادله وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع (c) و (c') به معادله‌های :

$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ و $x^2+y^2+ax+by+c=0$

خط (D) به معادله $(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$ می‌باشد ، که ازکاستن طرفین معادلهٔ دو دایره از یکدیگر به دست می‌آید .

(۳) اگر دو دایره (c) و (c') بر هم عمود باشند رابطه

$aa'+bb'=2(c+c')$

برقرار است .

(۴) اگر با قرار دادن مختصات نقطه‌ای در عبارت :

$f(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c$

حاصل مقدار مثبتی باشد ، نقطهٔ خارج واگر حاصل مقدار منفی باشد نقطه داخل دایرهٔ به‌معادلهٔ $f(x,y)=0$ است .

XIII- معادلهٔ مماس و قائم بر مقطعهای مخروطی :

(۱) ــ معادلهٔ مماس بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=R^2$ در نقطهٔ $M(a,b)$ واقع بر آن به صورت $ax+by=R^2$ و معادلهٔ قائم برآن در این نقطه به صورت $ay-bx=0$ است .

(۲) ــ معادله مماس بر بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ در نقطهٔ معلوم $M(x_0,y_0)$ واقع برآن عبارت است از :

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$$

و معادلهٔ قائم برآن برابر $\frac{a^2x}{x_0}-\frac{b^2y}{y_0}=c^2$ است.

(۳)معادلهٔ مماس بر هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ در نقطهٔ $M(x_0,y_0)$

واقع بر آن عبارت است از $\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1$

و معادلهٔ قایم بر آن $\frac{a^2x}{x_0}+\frac{b^2y}{y_0}=c^2$ است.

(۴)ـ معادله مماس بر سهمی به معادلهٔ $y^2=2Px$ در نقطهٔ معلوم $M(x_0,y_0)$ واقع بر آن عبارت است از:

$y_0y-Px=y_0^2-Px_0$ و معادله قائم برآن $y_0x+Py=x_0y_0+Py_0$ است.

XIV- مختصات مرکز تقارن منحنی‌هایی که معادلات آنها به صورت پارامتری است.

مرکز تقارن هریک از مکانهای زیر نقطهٔ O' به مختصات (c,d) می‌باشد.

$$(1)\ M\left|\begin{array}{l}x=a\cos\alpha+c\\ y=b\sin\alpha+d\end{array}\right. \qquad (2)\ M\left|\begin{array}{l}x=\frac{a}{\cos\alpha}+c\\ y=b\,tg\alpha+d\end{array}\right. \qquad (3)\ M\left|\begin{array}{l}x=a\cot g\alpha+c\\ y=\frac{b}{\sin\alpha}+d\end{array}\right.$$

زیرا مثلا" درمورد مکان اخیر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\frac{(x-c)^2}{a^2}=\cot g^2\alpha\\ \frac{(y-d)^2}{b^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases} \qquad \frac{(y-d)^2}{b^2}=1+\frac{(x-c)^2}{a^2}\rightarrow\frac{(y-d)^2}{b^2}-\frac{(x-c)^2}{a^2}=1$$

معادله مکان هندسی ، هذلولی را نشان می‌دهد که مرکز آن $O'(c,d)$ "مرکز تقارن" آن می‌باشد.

" معادله اول بیضی و درحالت خاص $a=b$ دایره و معادله‌های دوم و سوم هذلولی را نشان می‌دهد. "

XV ـ مشتق تابع پارامتری $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ به صورت $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$ می‌باشد.

مثلا" ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی $\begin{cases}x=1-2\sin\alpha\\ y=\cos\alpha-2\end{cases}$ در نقطهٔ $M(x,y)$ چنین است:

$$y'_x=\frac{y'_\alpha}{x'_\alpha}=\frac{-\sin\alpha}{-2\cos\alpha}=\frac{1}{2}tg\alpha$$

XVI- محاسبهٔ تابع اولیهٔ بعضی از تابعهای مثلثاتی:

۱) برای تعیین تابع اولیه، تابعهایی مثلثاتی به صورت $\sin^P mx$ و $\cos^P mx$ اگر P عددی فرد مانند $P=2K+1$ باشد:

ابتدا یک عامل $\sin mx$؛ (یا $\cos mx$) را کنار گذاشته و بقیه را که شامل توان

زوج از $Sinmx$ ، ($Cosmx$ یا) است به $Cosmx$ (ویا $Sinmx$) تبدیل کرده و تابع اولیه می‌گیریم .

مثال:

$$\int Sin^7\frac{5}{2}xdx=\int Sin^6\frac{5}{2}x.Sin\frac{5}{2}xdx=\int(1-Cos^2\frac{5}{2}x)^3.Sin\frac{5}{2}xdx$$

$$=\int(1-3Cos^2\frac{5}{2}x+3Cos^4\frac{5}{2}x-Cos^6\frac{5}{2}x)Sin\frac{5}{2}xdx=$$

$$\int Sin\frac{5}{2}xdx-3\int Cos^2\frac{5}{2}x.Sin\frac{5}{2}xdx+3\int Cos^4\frac{5}{2}xSin\frac{5}{2}xdx+$$

$$-\int COS^6\frac{5}{2}x.Sin\frac{5}{2}xdx$$

$$=-\frac{2}{5}Cos\frac{5}{2}x+\frac{6}{15}Cos^3\frac{5}{2}x-\frac{6}{25}.Cos^5\frac{5}{2}x+\frac{2}{35}Cos^7\frac{5}{2}x+c$$

اگر P عددی زوج باشد مانند $P=2K$ می‌توان چنین عمل کرد .

$$\int Cos^4 3xdx=\int(\frac{1+Cos6x}{2})^2dx=\frac{1}{4}\int(1+2Cos6x+Cos^2 6x)dx$$

$$\begin{cases}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}Sin6x+\frac{1}{4}\int Cos^2 6xdx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}Sin6x+\frac{1}{4}\int(\frac{1+Cos12x}{2})dx\\ \frac{1}{4}=+\frac{1}{12}Sin6x+1/_8x+\frac{1}{96}Sin12x+c=3/_8x+\frac{1}{12}Sin6x\end{cases}$$

$$+\frac{1}{96}\times Sin12x+c$$

۲) تابع اولیهٔ tg^Pmx و $Cotg^Pmx$

اگر P عددی فرد باشد محاسبهٔ تابع اولیه خارج از برنامه ریاضیات متوسطه می‌باشد.

مثال:

$$\int Cot\frac{x}{2}dx=2Ln\ Sin\frac{x}{2}+c\ ,\int tgudu=-LnCosu+c$$

اگر P عددی زوج باشد می‌توان نوشت :

$$tg^P x=tg^{2k-2}x(1+tg^2x)-tg^{2k-4}x(1+tg^2x)+tg^{2k-6}x$$

$$\times(1+tg^2x)+\cdots+1$$

اکنون با توجه به این که $1+tg^2x$ مشتق tgx است می‌توان انتگرال عبارت بالا را به آسانی به فرض $tgx=u$ محاسبه کرد .

مثال:

$$\int tg^6 x dx = \int [tg^4 x(1+tg^2 x) - tg^2 x(1+tg^2 x) + (1+tg^2 x) - 1] dx$$

$$= \int tg^4 x(1+tg^2 x)dx - \int tg^2 x(1+tg^2 x)dx + \int (1+tg^2 x)dx - \int dx = \frac{1}{5} tg^5 x - \frac{1}{3} tg^3 x + tgx - x + c$$

* XVII– باتوجه به آنکه مشتق تابع $y=(\frac{ax+b}{a'x+b'})^n$ به صورت:

$$y' = n(\frac{ax+b}{a'x+b'})^{n-1} \times \frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2} = n(ab'-ba') \times \times \frac{(ax+b)^{n-1}}{(a'x+b')^{n+1}}$$

می‌باشد می‌توان نوشت

$$\int \frac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+2}} dx = \frac{1}{(n+1)(ab'-ba')} (\frac{ax+b}{a'x+b'})^{n+1} + c$$

XVIII- محاسبه سطح محصور بین دو منحنی:

معادلهٔ دو تابع را $y_1=f(x)$ و $y_2=g(x)$ در نظر گرفته و ابتداتابع اولیهٔ $f(x)-g(x)$ را بدست می‌آوریم. نتیجه را $F(x)$ نامیده و طولهای نقطه‌های برخورد دو منحنی تابعهای داده شده را تعیین می‌کنیم. سطح از رابطهٔ:

$$S_b^a = |F(a)-F(b)|$$

بدست می‌آید که درآن a و b طولهای نقطه‌های برخورد دو منحنی می‌باشند.

مثال:

سطح محصور بین منحنی‌های $y=x^2-4x$ و $y=-x^2+2x$ را تعیین کنید.

$$f(x)-g(x) = x^2-4x-(-x^2+2x) = 2x^2-6x$$

$$F(x) = \frac{2}{3} x^3 - 3x^2$$

$$x^2-4x = -x^2+2x \longrightarrow 2x^2-6x=0 \longrightarrow x=0 \text{ و } x=3$$

$$S_0^3 = |F(3)-F(0)| = |2/3.27-3.9-0| = 9$$ واحدسطح

---

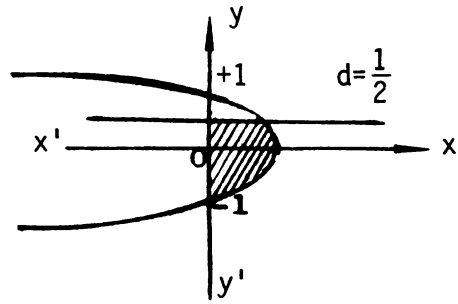
* در باره Ln " لگاریتم نپری در صفحات قبل توضیح داده شده است.

XIX ـ محاسبه حجم حاصل از دوران سطح منحنی حول محور عرضها :

مثال:

حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y^2=1-x$ و محور عرضها و خط $y=\frac{1}{2}$ را حول محور yy' حساب کنید .

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases}$$



$$\pi x^2=\pi(1-y^2)^2=\pi(1-2y^2+y^4)$$

$$G(Y)=\pi(Y-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5)$$

$$V=G(\tfrac{1}{2})-G(-1)$$

$$V=\pi(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32})-(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5})=\frac{459}{480}$$ واحد حجم

تبصره

حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$ حول محور x از دستور $V=\int_a^b \pi y^2 dx$ به‌دست می‌آید .

پرسشهای جبر و آنالیز

۱ــ کدامیک از تابعهای زیر زوج است؟

۱) $x\sin x$ ۲) $x\cos x$

۳) $x^2 tg x$ ۴) $x+\cos x$

۲ــ درصورتی که $a>0$ و $f(x+a)=f(x)$ باشد $f(x+a)-f(x-a)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $2a$

۳) $f(x+2a)$ ۴) $f(x)$

۳ــ $f(x)$ تابعی از یک خط مثلثاتی و $f(x)=f(x+\frac{\pi}{2})$ است تابعی است از؟

۱) $\sin\frac{x}{2}$ ۲) $tg\frac{x}{2}$

۳) $\sin 2x$ ۴) $tg 2x$

۴ــ اگر $f(x,y)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ باشد $f(\frac{1}{y^2},\frac{1}{x^2})$ کدام است؟

۱) $\frac{x+y}{x-y}$ ۲) $\frac{x-y}{x+y}$

۳) $\frac{y+x}{y-x}$ ۴) $\frac{y-x}{y+x}$

۵ــ اگر $f(u)=a^u$ ، $g(x)=\log x$ و $a>1$ و $x>0$ باشد $fog(x)$*

---

* نماد $fog(x)$ برای ترکیب دو تابع f ، g بکاربرده‌شده‌ومقصود $f[g(x)]$ است.

همواره برابر است با ؟

۱) ax ۲) x

۳) $Logx$ ۴) $\frac{x}{a}$

۶ـ درصورتی که $x<0$ و $f(x)=\frac{x-|3x|}{2}$, $g(x)=Sinx$ باشد $fog(x)$ برابر است با :

۱) $-Sinx$ ۲) $Sinx$

۳) $-2Sinx$ ۴) $2Sinx$

۷ـ دو تابع $f(x)=\frac{x+2|x|}{3}$ و $g(x)=x^2$ داده شده‌اند . اگر $x>0$ باشد مقدار $gof(x)$ برابر است با :

۱) $\frac{1}{2}x^2$ ۲) $\frac{1}{3}x^2$

۳) $2x^2$ ۴) x^2

۸ـ اگر $f(x)=Logx$ و $z=\frac{f(x)+f(y)}{f(\sqrt{xy})}$ باشد z برابر است با :

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۲ـ

۹ـ $f(x)=Log(1-x)$ و $f(z)=f(x)+f(y)$ باشد z برابر است با :

۱) $xy-x-y$ ۲) $x+y-xy$

۳) $x-y+xy$ ۴) $xy+x+y$

۱۰ـ اگر $f(\frac{x}{x-1})=1-x$ باشد $f(x)$ کدام است ؟

۱) $\frac{-1}{x+1}$ ۲) $\frac{1}{x+1}$

۳) $\frac{1}{x-1}$ ۴) $\frac{1}{1-x}$

۱۱ـ اگر $f(x-1)=x^3$ باشد $f(1+x)$ برابر است با :

۱) $(x+1)^3$ ۲) $(x+2)^3$

۳) $(2x+1)^3$ ۴) $(x-2)^3$

۱۲ـ هرگاه $f(4-x)+2f(x-4)=3x$ باشد $f(x)$ کدام است ؟

۱) $3x-4$ ۲) $3x+4$
۳) $x-4$ ۴) $x+4$

۱۳ــ اگر برای $y\neq 0$ مقدار $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ باشد $f(\frac{1}{y})$ برابر است با :

۱) $-f(y)$ ۲) $f(y)$
۳) $1-f(y)$ ۴) $1+f(y)$

۱۴ــ کدامیک از تابعهای زیر فرد است؟

۱) $y=|x|+\sqrt{x^2-1}$ ۲) $y=x.\mathrm{Sin}x$
۳) $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ ۴) $y=3x+3-x$

۱۵ــ تابع $y=\frac{1}{\mathrm{Cos}2x}-\mathrm{Sin}2x$ تابعی است :

۱) فرد ۲) زوج
۳) درفاصله‌ای‌فردودرفاصله‌ای‌زوج ۴) نه فرد و نه زوج

۱۶ــ هرگاه رابطه $f(-x)\mathrm{Sin}2x-f(x)\mathrm{Cos}2x=2x$ برابر باشد $f(x)$ کدام است؟

۱) $2x(\mathrm{Cos}2x-\mathrm{Sin}2x)$ ۲) $-2x(\mathrm{Cos}2x-\mathrm{Sin}2x)$
۳) $2x$ ۴) $\mathrm{Sin}2x-\mathrm{Cos}2x$

۱۷ــ اگر $f(x)=\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+1})$ باشد $f(-x)$ کدام است؟

۱) $-f(x)$ ۲) $\frac{1}{f(x)}$
۳) $\frac{-1}{f(x)}$ ۴) $-xf(x)$

۱۸ــ تابع $f(x)=\begin{cases} x<0 & \text{به ازاء } 0 \\ x>0 & \text{به ازاء } x \end{cases}$ را با کدام رابطه می‌توان نوشت؟

۱) $y=x$ ۲) $y=|x|$
۳) $y=\frac{x+|x|}{2}$ ۴) $y=\frac{x-|x|}{2}$

۱۹ــ اگر $f(x)=a^x+b^x$ و $g(x)=\frac{f(x)}{f(x-2)}$ باشد آنگاه ؟

۱) $g(3)=a^2+b^2$ ۲) $g(3)=a^2-ab+b^2$

۳) $g(3)=a^2+ab+b^2$ ۴) $g(3)=a^2-2ab+b^2$

۲۰ـ درصورتی که $f(x)=x$ و $g(x)=(x+1)^2$ باشد $gof(x)+fog(x)$ برابر است با ؟

۱) $2g(x)$ ۲) $4f(x)$

۳) $-4f(x)$ ۴) $-4g(x)$

۲۱ـ اگر $f(x)=x+k$ باشد برای آنکه $f(x^2-1)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد، لازم است که k برابر باشد با ؟

۱) ۳ ۲) ۳ـ

۳) ۱ ۴) صفر

۲۲ـ به ازاء کدامیک از مقدارهای a و b عبارت ax^3-4x^2-bx+6 بر x^2-x-2 قابل قسمت است؟

۱) $a=b=1$ ۲) $a=-b=1$

۳) $a=-b=-1$ ۴) $a=b=-1$

۲۳ـ باقیماندهٔ تقسیم عبارت $f(x)=x^6+3x^5-2x^4+x^2-x+1$ بر x^2-1 کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ـ

۳) $2x+1$ ۴) $2x$

۲۴ـ اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $4x-1$ برابر ۵ باشد باقیمانده تقسیم $f(x^2)$ بر $2x+1$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) صفر ۴) ۵

۲۵ـ اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $2x^3-3x+1$ برابر x^2+x+1 باشد باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

۲۶ـ عبارت $f(x)=x^3+3x^2-4$ برکدامیک از عبارتهای زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $(x-1)^2$ ۲) $(x+1)^2$

۳) $(x-2)^2$ ۴) $(x+2)^2$

۲۷ـ برای آنکه عبارت $(x-a)(x-b)+k$ بر $x-a-b$ بخش پذیر باشد لازم است k برابر باشد با؟

۱) $a+b$ ۲) ab

۳) $-(a+b)$ ۴) $-ab$

۲۸ـ برای اینکه عبارت $x^3+ax^2+(b+1)x+1$ بر x^2+bx+1 بخش پذیر باشد چه رابطه‌ای بین a و b باید برقرار باشد؟

۱) $a+b=1$ ۲) $2a+b=1$

۳) $a+2b=1$ ۴) $a-b=1$

۲۹ـ اگر باقیمانده‌های تقسیم $f(x)$ و $g(x)$ بر x^2+x+1 به ترتیب x، $x+1$ باشد باقیمانده تقسیم $f(x).g(x)$ بر x^2+x+1 برابر است با:

۱) x ۲) ۲

۳) x^2+x ۴) ۱ـ

۳۰ـ هرگاه باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ برابر ۲ و بر $x-2$ مساوی ۳ باشد باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-3x+2 برابر است با:

۱) $x+1$ ۲) $2x+1$

۳) $x+3$ ۴) ۶

۳۱ـ هرگاه عبارت $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ بر $(x+1)^4$ بخش‌پذیر باشد a برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۳ـ

۳) ۲ـ ۴) ۲

۳۲ـ عبارت x^3+2x^2-1 بر کدامیک از عبارتهای زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۲) $x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

۳) $x-\frac{\sqrt{5}-2}{2}$ ۴) $x+\frac{\sqrt{5}-2}{2}$

۳۳ـ $a^{12}+1$ برکدامیک از عبارتهای زیر همواره قابل قسمت است؟

۱) a^2+1 ۲) a^3+1

۳) a^4+1 ۴) a^6+1

۳۴ـ در حاصلضرب $(x+5)(x-6)(x^2-4)(x+1)$ ضریب x^4 برابر است با:

۱) صفر ۲) ۳

۳) ۵ـ ۴) ۶

۳۵ـ در حاصلضرب $(x+2)^3(2x-1)^5(4x^2-2x-1)^4$ مجموع ضریبهای جمله‌های $(x, x^2, x^3, \ldots\ldots\ldots x^{16})$ برابر است با:

۱) ۳۵ ۲) ۲۸

۳) ۲۶ ۴) ۲۷

۳۶ـ جمله چهارم از بسط $(1-\sqrt{2})^5$ کدام است؟

۱) $-۲۰\sqrt{۲}$ ۲) $۲۰\sqrt{۲}$

۳) ۲۰ ۴) ۲۰ـ

۳۷ـ در بسط $(a+b)^{10}$ کدام جمله بزرگترین ضریب را دارد؟

۱) جمله‌پنجم ۲) جمله‌هفتم

۳) جمله‌ششم ۴) جمله دهم

۳۸ـ اگر مجموع ضریبهای بسط $(mx-1)^{100}$ برابر $۲^{۱۰۰}$ باشد مقدار m برابر است با؟

۱) ۲ ۲) ۳ یا ۲

۳) ۳ یا ۱ـ ۴) ۳ یا ۲ـ

۳۹ـ هرگاه جمله سوم بسط $(\sqrt[3]{a^2}+\frac{1}{a})^n$ مستقل از a باشد n برابر است با:

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۹ ۴) ۱۲

۴۰ـ در بسط $(\sqrt{a}+\sqrt[5]{b})^{32}$ چندجمله گویا وجود دارد؟

۱) ۷ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۲

۴۱ـ اگر n عدد زوج و $a^n=b^n$ باشد کدامیک‌از رابطه‌های زیر همواره‌برقرار است؟

۱) $|a|+|b|=0$ ۲) $a+b=0$

۳) $|a|-|b|=0$ ۴) $a-b=0$

۴۲ـ برای آنکه رابطه $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{1+x}=\frac{2}{1-x^2}$ همواره برقرار باشد باید:

۱) $a=-b=-1$ ۲) $a=b=-1$

۳) $a=b=1$ ۴) $a=-b=1$

۴۳ـ اگر a و bدو عدد گویا باشند برای اینکه $\frac{a(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1}-\frac{b(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}$ عدد گویا نباشد لازم است:

۱) $a=-b$ ۲) $a=b$

۳) $ab=1$ ۴) $ab=-1$

۴۴ـ برای آنکه دو عدد ۱ـ و ۲ ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد لازم است که:

۱) $c-2b=0$ ۲) $c+2b=0$

۳) $3b-c=0$ ۴) $2b+c=0$

۴۵ـ در صورتی که m و n عددهای گویا و معادله $x^2+mx+n=0$ دارای ریشه مضاعف باشد معادله $x^2+mx+n-2=0$ دارای:

۱) ریشه مضاعف است ۲) دو ریشه گنگ است

۳) دوریشه گویا است ۴) ریشه نیست

۴۶ـ اگر tga و tgb ریشه‌های معادله $x^2+Px+4=0$ باشد $tg(a+b)$ برابر است با:

۱) $\frac{5}{P}$ ۲) $\frac{P}{5}$

۳) $\frac{3}{P}$ ۴) $\frac{P}{3}$

۴۷ـ درصورتی که Logb , Loga ن معادله $x^2+2mx-3=0$ باشد مقدار $\frac{Logab}{Loga.Logb}$ برابر است با:

۱) $\frac{-2m}{3}$ ۲) $\frac{3}{2m}$

۳) $\frac{2m}{3}$ ۴) $\frac{-3}{2m}$

۴۸ـ اگر Cotgx , tgx ریشه‌های معادله $y^2+y+b-2=0$ باشد مقدار $\frac{1}{SinxCosx}$ برابر است با:

۱) ۳ـ ۲) ۱

۳) ۱ـ ۴) ۳

۴۹ـ اگر ریشه‌های معادله $(m-2)x^2+x-2m=0$ عکس ریشه‌های معادله $(m+3)x^2+(2-m)x-1=0$ باشند، m برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۲ـ

۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۵۰ـ برای آنکه عدد ۲ بین دو ریشه معادله $(m+1)x^2+mx-10=0$ باشد کافی است؟

۱) $m<-2$ ۲) $-1<m<1$

۳) $0<m<2$ ۴) $m>2$

۵۱ـ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $x^2-mx+m-2=0$ به ازاء اندازه‌های مختلف m باشند آنگاه:

۱) $x'>x''>1$ ۲) $x''<x'<1$

۳) $x'>1>x''$ ۴) $x'>1=x''$

۵۲ـ به‌ازاء چه مقدارهائی‌از m دو عدد صفرو ۱ـ داخل ریشه‌های معادله $x^2+(m-1)x-m=0$ قرار می‌گیرد:

۱) $m>1$ ۲) $m>0$

۳) $m<1$ ۴) $m<0$

۵۳ــ به ازاء چه مقدارهائی از m ریشه‌های معادله $x^2-2mx-1=0$ در نامساویهای $x'<-2<x''<2$ صدق می‌کند؟

۱) $m<\frac{3}{4}$ ۲) $m<-\frac{3}{4}$

۳) $m>\frac{3}{4}$ ۴) $m>-\frac{3}{4}$

۵۴ــ برای آنکه $|x+y|=|x|+|y|$ باشد کدام شرط باید همواره برقرار باشد؟

۱) $xy\geqslant 0$ ۲) $xy\leqslant 0$

۳) $x+y\geqslant 0$ ۴) $x+y\leqslant 0$

۵۵ــ برای آنکه دستگاه $\begin{cases} mx+2y=1 \\ (2m-3)x-2y=3 \end{cases}$ دارای جواب باشد باید؟

۱) $m\geqslant 1$ ۲) $m\neq 1$

۳) $m\leqslant 1$ ۴) $m=1$

۵۶ــ معادله $\sqrt{x^3+1}+x=-1$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) هیچ

۵۷ــ به ازای چه مقدار از m یک ریشه معادله $x^2-3mx+2m=0$ دو برابر عکس دیگری است؟

۱) ۲ ۲) ۲ــ

۳) ۱ ۴) ۱ــ

۵۸ــ معادله $x^2+\sqrt{x^2-1}=3$ دارای چند جواب است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۵۹ــ دو معادله $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $4x^2+y^2-8x-2y+1=0$ دارای‌چند جواب مشترک می‌باشند؟

۱) ۳ ۲) ۱

۳) ۴ ۴) ۲

۶۰ــ معادله $x^5-2x^4-4x+8=0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۱ ۴) ۲

۶۱ــ اگر $x'=2+\sqrt{3}$ یکی از ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ و ضریبهای a و b و c گویا باشد ریشه دیگر معادله برابر است با:

۱) $-۲-\sqrt{۳}$ ۲) $-۲-\sqrt{۳}$

۳) $-۲+\sqrt{۳}$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

۶۲ــ معادله $2(x^2-3x+2)^2+(x^4+2x^3-4x^2+3x-2)^4=0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) هیچ

۶۳ــ به ازاء کدامیک از مقدارهای m سه‌جمله‌ای $4x^2-4x+m$ به صورت مجموع دومربع نوشته می‌شود؟

۱) $m<2$ ۲) $m<-3$

۳) $m>1$ ۴) $m>-3$

۶۴ــ m به سمت کدامیک از عددهای زیر میل کندتا فقط یکی از ریشه‌های معادله به‌سمت ∞ میل کند؟ $(m^2-1)x^2-2(m-1)x+m+2=0$

۱) -۱ ۲) ± ۱

۳) ۱ ۴) -۲

۶۵ــ اگر معادله $(a-1)x^3-2x+a+2=0$ دارای دو ریشه قرینه باشد a برابر است با:

۱) ۲ ۲) صفر

۳) ۲-　　۴) ۱

۶۶- معادله $x^3+6x^2+12x+9=0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

۱) سه　　۲) یک

۳) دو　　۴) هیچ

۶۷- معادله $x^6+2x^2+100=0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

۱) شش　　۲) دو

۳) چهار　　۴) هیچ

۶۸- معادله $(x-1)^3+8(2-x)^3+(x-3)^3=0$ دارای :

۱) سه ریشه مساوی است

۲) یک ریشه حقیقی است

۳) سه‌ریشه‌حقیقی‌که‌تصاعدحسابی‌میسازند

۴) سه‌ریشه‌حقیقی‌که‌تصاعدهندسی‌میسازند

۶۹- معادله $x^4+4x+m=0$ دارای ریشه مضاعف است در این صورت m برابراست با :

۱) ۳-　　۲) صفر

۳) ۱　　۴) ۳

۷۰- معادله $|x-1|+|x-2|=3$ دارای چند ریشه است؟

۱) یک　　۲) دو

۳) چهار　　۴) هیچ

۷۱- معادله $|x^2-1|=3$ دارای چند ریشه است؟

۱) یک　　۲) چهار

۳) دو　　۴) سه

۷۲- معادله $|x^2-4|=1$ دارای چند ریشه است؟

۱) چهار　　۲) دو

۳) یک　　۴) سه

۷۳ـ اگر $z = 2x+1$ باشد برای اینکه $|x-1| < 2$ باشد باید داشته باشیم:

۱) $-2<z<0$ ۲) $-1<z<0$

۳) $0<z<7$ ۴) $-1<z<7$

۷۴ـ اگر $E=xy+yz+zx$ و $x+y+z=0$ باشد همواره:

۱) $E>0$ ۲) $E\geqslant 0$

۳) $E\leqslant 0$ ۴) $E<0$

۷۵ـ اگر x و y دو عدد مثبت و $x+y=2a$ باشد کدامیک از رابطه‌های زیر همواره درست است؟

۱) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{2}{a}$ ۲) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{2}{a}$

۳) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{a}$ ۴) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{a}$

۷۶ـ تعداد عددهای درستی که در نامعادله $x^2-8x+7<0$ صدق می‌کند برابر است با:

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

۷۷ـ برای آنکه داشته باشیم $(x-3)(x-1)(x+1)<0$:

۱) لازم است $x<-1$ باشد ۲) لازم است $-1<x<1$ باشد

۳) کافی است $1<x<3$ باشد ۴) کافی است $x>3$ باشد.

۷۸ـ برای اینکه $(x^2-4)(1-x)(3-x)<0$ باشد کافی است.

۱) $x<-2$ ۲) $-2<x<1$

۳) $1<x<2$ ۴) $x>3$

۷۹ـ جواب نامعادله $|x^3-1|\leqslant x^2+x+1$ کدام است؟

۱) $1\leqslant x<2$ ۲) $x\leqslant 0\,,\,x\geqslant 2$

۳) $0\leqslant x\leqslant 2$ ۴) $-1\leqslant x\leqslant 1$

۸۰ـ هرگاه $a<0$ باشد کدامیک از نامساویهای زیر همواره برقرار است؟

۱) $\frac{a^2+1}{a}>0$ ۲) $\frac{a^2+1}{a}<-3$

۳) $\frac{a^2+1}{a}\geqslant -1$ ۴) $\frac{a^2+1}{a}\leqslant -2$

۸۱ـ نامعادله $|x+2|<x^2$:

۱) دودسته جواب دارد ۲) یک دسته جواب دارد

۳) جواب ندارد ۴) چهار دسته جواب دارد

۸۲ـ به ازاء کدام مقدارهای مثبت از x نا معادله $\frac{1}{2} < \frac{2-3x}{2x}$ همواره برقرار است؟

۱) $\frac{1}{2}<x<2$ ۲) $1<x<2$

۳) $0<x<2$ ۴) $\frac{1}{2}<x<1$

۸۳ـ ضریب زاویه خطی که دو نقطه $A(1,0)$ و $B(\cos\alpha,\sin\alpha)$ را به هم وصل می‌کند برابر است با:

۱) $tg\frac{\alpha}{2}$ ۲) $-tg\frac{\alpha}{2}$

۳) $Cotg\frac{\alpha}{2}$ ۴) $-Cotg\frac{\alpha}{2}$

۸۴ـ فاصله دو خط موازی $y=x+5$ و $y-x=0$ برابر است با:

۱) $5\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) 5 ۴) $5\sqrt{2}$

۸۵ـ کدامیک از خطهای زیر از دو خط $3x-y+7=0$ و $3x-y-3=0$ به یک فاصله است؟

۱) $3x-y-2=0$ ۲) $3x-y-1=0$

۳) $3x-y+1=0$ ۴) $3x-y+2=0$

۸۶ـ خط Δ بر $3x-y+7=0$ عمود است و فاصله مبداء مختصات از خط Δ برابر ۲

است خط Δ عبارت است از:

۱) $4x-3y+10=0$ ۲) $4x-3y+8=0$

۳) $4x-3y+6=0$ ۴) $4x-3y+4=0$

۸۷ـ در معادله خطهای $y=x+2$ و $2y+x=2m$ به ازاء چه مقدار از m طول قطعه‌ای از خط $y=2$ محصور بین دو خط بالا برابر ۴ می‌باشد:

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$

۳) ۴ ۴) $\sqrt{2}$

۸۸ـ معادله قطر مربعی $y=2x$ و مختصات یک رأس (۳ و ۲) است مساحت این مربع کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{5}{2}$

۳) ۲ ۴) ۵

۸۹ـ مکان هندسی نقطه‌هائی از صفحه مختصات که مختص اول آنها در نامساوی $x-1 < x+1$ صدق می‌کند عبارت است از:

۱) نیم صفحه $x<0$ ۲) نیم صفحه $x>0$

۳) محور x ها ۴) قسمت مثبت محور x ها

۹۰ـ به ازاء کدام مقدارهای m نقطه $A(m-1, 2m-4)$ بالای محور xها و زیر نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟

۱) $1<m<3$ ۲) $2<m<3$

۳) $0<m<1$ ۴) $m<0$

۹۱ـ خط D به معادله $x+y=3$ حول مبداء مختصات ۹۰ در جهت مثبت دوران می‌کند، معادله خط حاصل کدام است؟

۱) $x-y=3$ ۲) $y-x=3$

۳) $x+y=3$ ۴) $y+x=-3$

۹۲ـ مبداء مختصات به کدامیک از خطهای زیر نزدیکتر است؟

۱) $x+3y=1$ ۲) $2x+y=1$

۳) $3x+2y=1$ ۴) $2x+2y=1$

۹۳ـ به ازاء کدام مقدارها از عدد درست و مثبت n نامساوی $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\frac{1}{\sqrt{10}}$ همواره برقرار است؟

۱) $n\geqslant 3$ ۲) $n\geqslant 4$

۳) $n\geqslant 1$ ۴) $n\geqslant 2$

۹۴ـ تابع $f(x)=\frac{2(x-1)}{|x-1|}$ در نقطه $x=1$:

۱) حدچپ و حد راست دارد و این دو حد باهم برابرند

۲) حد راست دارد ولی حد چپ ندارد

۳) حد چپ دارد ولی حد راست ندارد

۴) حدچپ و حد راست داردولی باهم برابر نمی‌باشند

۹۵ـ حد تابع $y=\frac{10}{3+3^{\tan x}}$ وقتی که $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ برابر است با :

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) صفر

۳) $\frac{۱۰}{۶}$ ۴) حد ندارد

۹۶ـ اگر حد $y=f(x)$ در نقطه صفر برابر با ۲ باشد لازم است y به ازای ؟

۱) جمیع مقدارهای x منفی باشد ۲) جمیع مقدارهای x مثبت باشد

۳) بعضی‌ازمقدارهای x منفی باشد ۴) بعضی‌ازمقدارهای x مثبت‌باشد.

۹۷ـ حد تابع $\frac{x^2}{(\sin 2x)^2}$ وقتی x به سمت صفر میل کند برابر است با :

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) صفر

۹۸ـ حد تابع $y=\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-2}}$ وقتی که $x\longrightarrow 2$ برابر است با :

۱) صفر ۲) بینهایت

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۹۹ـ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$ برابر است با :

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۰ـ حد عبارت $\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}}$ (وقتی که $x \longrightarrow \infty$) برابر است با :

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۰۱ـ حد عبارت $(1-x)\ tag\ \frac{x\pi}{2}$ وقتی که $x \longrightarrow 1$ برابر است با :

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$

۳) $-\frac{\pi}{2}$ ۴) $-\frac{2}{\pi}$

۱۰۲ـ حد $\frac{1-x^2}{(ArcCosx)^2}$ وقتی که $x \longrightarrow 1$ برابر است با :

۱) صفر ۲) یک
۳) منهای یک ۴) دو

۱۰۳ـ کدامیک از تابعهای زیر وقتی که $x \longrightarrow 2$ دارای حد است ؟

۱) $y=\frac{|x-2|}{x-2}$ ۲) $y=\frac{(x-2)^2}{|x-2|}$

۳) $y=\frac{Sin|x-2|}{x-2}$ ۴) $y=\frac{4-x^2}{|x-2|}$

۱۰۴ـ حد تابع $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$ وقتی که $x \longrightarrow -\infty$ برابر است با :

۱) صفر ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۱۰۵ـ حد تابع $y=\frac{x+2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x}-2x+5}$ وقتی که $x \longrightarrow +\infty$ برابر است با :

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۰۶ـ حد تابع $y=\frac{x+\sin x}{x-\cos x}$ وقتی که $x \longrightarrow \infty$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) صفر

۳) -۱ ۴) ۲

۱۰۷ـ حد تابع $y=\frac{x-\sin x}{x^3}$ وقتی $x \longrightarrow 0$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۰۸ـ حد تابع $\frac{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{x\sin x}$ هنگامی که $x \longrightarrow 0$ برابر است با $(a<0)$

۱) $\frac{1}{a}$ ۲) $-\frac{1}{a^2}$

۳) $\frac{1}{a^2}$ ۴) $-\frac{1}{a}$

۱۰۹ـ حد عبارت $\frac{2+3+\cdots\cdots+n}{n^2+n-2}$ وقتی n به‌سمت بینهایت‌میل‌کند کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) صفر

۱۱۰ـ اگر $f(x)=2\sqrt{x^3-2x}$ باشد $\lim\limits_{x \to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۲

۱۱۱ـ حد عبارت $\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ وقتی $x \longrightarrow 0$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

۱۱۲ـ حد تابع $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ وقتی $x \longrightarrow 0$ کدام است؟
۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۳
۳) ∞ ۴) صفر

۱۱۳ـ حد عبارت $\frac{\operatorname{Sin}(\operatorname{Cotg}x)}{\operatorname{Cotg}x}$ وقتی $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ کدام است؟
۱) بینهایت ۲) ۱ـ
۳) ۱ ۴) صفر

۱۱۴ـ حد $\frac{2x-2|x|+3}{3x+|x|+2}$ وقتی $x \longrightarrow -\infty$ برابر است با:
۱) ∞ ۲) $\frac{2}{3}$
۳) ۲ ۴) صفر

۱۱۵ـ $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ برابر است با:
۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱ ۴) $\sqrt{2}$

۱۱۶ـ حد تابع $\frac{\operatorname{Sin}x.\operatorname{Sin}2x....\operatorname{Sin}nx}{\operatorname{tg}x.\operatorname{tg}2x.....\operatorname{tg}nx}$ وقتی $x \longrightarrow 0$ برابر است با:
۱) ۱ ۲) $n!$
۳) $\frac{1}{n!}$ ۴) بینهایت

۱۱۷ـ حد تابع $y=\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^{n-1}+3^{n-1}}$ وقتی $n \longrightarrow +\infty$ برابر است با:
۱) ۴ ۲) ۹
۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۱۱۸ـ حد تابع $y=\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt[3]{x^3+x+2}$ وقتی $x \longrightarrow +\infty$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱-

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۶}$

۱۱۹- حد تابع $y=[\frac{(x+1)^2}{3x^2-5x+1}]^{\frac{2x+1}{3+x}}$ وقتی $x \longrightarrow \infty$ برابر است با:

۱) ∞ ۲) صفر

۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۹}}$

۱۲۰- حد تابع $y=\frac{\sin 5x^0}{x-5\sin 2x^0}$ وقتی $x \longrightarrow 0$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۲(۱۸-\pi)}$

۱۲۱- به ازاء چه مقدارهائی از x تابع $y=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$ تعریف شده است؟

۱) $\frac{1}{3}<x\leqslant 3$ ۲) $\frac{1}{2}\leqslant x<2$

۳) $1<x<3$ ۴) $1<x<2$

۱۲۲- تابع $y=[\frac{1+x}{1-x}]^{\frac{3}{2}}$ در کدامیک از فاصله‌های زیر همواره معین است؟

۱) $(-2,0)$ ۲) $(0,2)$

۳) $(-1,\frac{1}{2})$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

۱۲۳- تابعهای $f(x)=(x-1)(x+2)$, $g(x)=3x-6$ در فاصله ∞ تا $\infty-$ پیوسته می‌باشند کدامیک از تابعهای زیر در این فاصله پیوسته نمی‌باشد.

۱) $Q(x)=\sqrt{f(x).g(x)}$ ۲) $Q(x)=\frac{2f(x)}{3g(x)}$

۳) $Q(x)=3f(x)[g(x)]^2$ ۴) ۱ و ۲

۱۲۴- تابع $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ در فاصله باز (۱ و ۱-) چند نقطه گسستگی

" انفصال " دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) صفر ۴) بیشمار

۱۲۵ــ اگر در تابع $y=\frac{x^2+x}{x}$ مقدار $f(0)$ برابر ۴ باشد تابع به ازاء $x=0$:

۱) پیوسته است ۲) نامعین است

۳) معین و پیوسته است ۴) معین و پیوسته است

۱۲۶ــ تابع $x^2-2x+2xy+y^2=0$ به ازاء چه مقدارهائی از x معین است؟

۱) $x\geqslant 0$ ۲) هر مقدار حقیقی x

۳) $x<0$ ۴) $-1<x<2$

۱۲۷ــ تابع $y=\frac{x^3-1}{x-1}$ در نقطه به طول $x=1$:

۱) حد دارد و پیوسته است

۲) حد ندارد

۳) مقدار حد و مقدار تابع به ازاء $x=1$ برابرند

۴) حد دارد ولی پیوسته نمی‌باشد.

۱۲۸ــ تابع $y=\frac{x+1}{x-|x|}$ در کدامیک از فاصله‌های زیر متصل است:

۱) $x\geqslant 1$ ۲) $0\leqslant x\leqslant 1$

۳) $x<0$ ۴) $-1\leqslant x\leqslant 1$

۱۲۹ــ کدامیک از تابعهای زیر به ازاء $x=0$ معین است؟

۱) $y=\frac{x}{|x|}$ ۲) $y=\frac{x+1}{x^2-|x|}$

۳) $y=\sqrt{-x^2(x+1)^2}$ ۴) $y=\frac{x^2+1}{x}$

۱۳۰ــ تابع $y=\frac{x+2}{1-\sqrt{1-x^2}}$ در کدامیک از فاصله‌های زیر معین است؟

۱) $-1\leqslant x\leqslant 1$ ۲) $x\geqslant 1$ $x\leqslant -1$

۳) $0<x\leqslant 1$ $\quad -1\leqslant x<0$ ۴) $x\neq \pm 1$

۱۳۱ــ دامنهٔ تغییرات در تابع $y=\mathrm{Log}\frac{2+3x}{3-2x}$ عبارت است از:

۱) $x<-\frac{۲}{۳}$ و $x>\frac{۳}{۲}$ ۲) $x<-\frac{۳}{۲}$ و $x>\frac{۲}{۳}$

۳) $-\frac{۲}{۳}<x<\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}<x<\frac{۲}{۳}$

۱۳۲ــ تابع $y=\sqrt{\mathrm{Cos}x}+\sqrt{\mathrm{Sin}x-\frac{1}{2}}$ در کدامیک از فاصله‌های زیر معین است؟

۱) $(\frac{\pi}{4}$ و صفر$)$ ۲) $(\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{2})$

۳) $(\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{4})$ ۴) $(\frac{3\pi}{4}$ و $\pi)$

۱۳۳ــ در تابع $y=\frac{\mathrm{Sin}(x-\frac{\pi}{3})}{4\mathrm{Cos}2x-1}$ به ازاء $x=\frac{\pi}{3}$ کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) تابع نامعین است ۲) مقدار تابع برابر صفر است

۳) مقدار تابع برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ است ۴) تابع معین و گسسته است

۱۳۴ــ تابع $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2 & \text{به ازاء } x\leqslant 2\\ x & \text{به ازاء } x>2\end{cases}$ دارای کدامیک از خاصیتهای زیر است؟

۱) همواره پیوسته است ۲) به ازاء $x=2$ ناپیوسته است

۳) در نقطه $x=2$ حد دارد ۴) به ازاء $x\geqslant 2$ پیوسته است

۱۳۵ــ وقتی $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ است تابع $y=\frac{\mathrm{tg}x+1}{1-\mathrm{Sin}\frac{x}{2}}$

۱) در دونقطه ناپیوسته است ۲) در چهار نقطه ناپیوسته است

۳) در سه نقطه ناپیوسته است ۴) دریک نقطه ناپیوسته است

۱۳۶ــ تابع $y=\mathrm{ArcSin}\frac{1}{x}$

۱) نقطه ناپیوستگی ندارد ۲) همواره ناپیوسته است

۳) فقط $x=0$ نقطه ناپیوستگی است ۴) در دو نقطه ناپیوسته است

۱۳۷ــ برای اینکه تابع $y=f(x)$ در فاصله (a,b) مشتق داشته باشد این تابع :

۱) باید فقط پیوسته باشد
۲) باید فقط معین باشد
۳) باید معین و پیوسته باشد
۴) شرطی خاص لازم ندارد

۱۳۸ــ مشتق تابع $y=|x|+|x-4|$ در صورتی که $0<x<4$ باشد برابر است با :

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۳۹ــ اگر تابع اولیه $f(x)$ برابر با $\frac{x^3}{6}$ باشد مشتق $f(\frac{1}{x})$ برابر است با :

۱) $-\frac{1}{x^3}$
۲) $-\frac{1}{x^2}$
۳) $-\frac{1}{6x^3}$
۴) $-\frac{1}{2x^2}$

۱۴۰ــ مشتق کسر $\frac{[x^2|\sin x|+3\cos(\frac{\pi}{2}+x)]}{2\sin x}$ درنقطه $x=-\frac{\pi}{2}$ برابر است با :

۱) -2π
۲) ۲
۳) 2π
۴) -2

۱۴۱ــ درصورتی که $x\cos y+y\sin x=0$ باشد مشتق این تابع کدام است ؟

۱) $y'=\frac{x\cos y+\sin x}{y\sin x-\cos y}$
۲) $y'=\frac{(y+1)\cos x}{(x-1)\sin y}$
۳) $y'=\frac{x\sin x+\cos y}{y\sin y-\cos x}$
۴) $y'=\frac{y\cos x+\cos y}{x\sin y-\sin x}$

۱۴۲ــ اگر u و v تابعهائی از x و 'u و 'v مشتق آنها باشند از $\frac{u}{v}+\frac{u'}{v'}=0$ نتیجه می‌شود :

۱) $\frac{u}{v}$ ثابت است
۲) $u.v$ ثابت است
۳) $u+v$ ثابت است
۴) u برابر صفر است

۱۴۳ــ مشتق تابع $y=f(x^2)$ عبارتست از :

۱) $2xf'(x^2)$
۲) $f'(x^2)$

۳) $f'(2x)$ ۴) $2xf'(2x)$

۱۴۴ـ مشتق تابع $y=ff(x)$ کدام است؟

۱) $f'f(x)$ ۲) $ff'(x)$

۳) $f'f'(x)$ ۴) $f'(x)f'f(x)$

۱۴۵ـ مشتق تابع $y=x^4+x^3$ نسبت به x^3 کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}x+1$ ۲) $4x^3+3x^2$

۳) $x+1$ ۴) $4x+1$

۱۴۶ـ مشتق تابع $g(x)=x|x|$ کدام است؟

۱) $2x$ ۲) $-2x$

۳) $2|x|$ ۴) $|x|$

۱۴۷ـ مشتق تابع $g(x)=\sin x^0$ عبارت است:

۱) $\cos x^0$ ۲) صفر

۳) $\frac{\pi}{180}\cos x^0$ ۴) $\frac{180}{\pi}\cos x^0$

۱۴۸ـ درصورتی که $f(x)=4x^3$ باشد مقدار $\lim_{\Delta x \to 0}[f'(x+\Delta x)-f'(x)]$ برابراست با:

۱) صفر ۲) $۱۲x^2$

۳) $۲۴x$ ۴) ۲۴

۱۴۹ـ مشتق تابع $x=\mathrm{Arctg}(x+y)$ کدام است؟

۱) $(x+y)^2$ ۲) $\mathrm{Cotg}^2 x$

۳) $1+\mathrm{tg}^2 x$ ۴) $(x+y)^{-2}$

۱۵۰ـ اگر تابع f در نقطه a مشتق پذیر باشد $\lim\frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$ برابر است با؟

۱) $f'(a)$ ۲) $-f'(a)$

۳) $2f'(a)$ ۴) صفر

۱۵۱ــ مقدار مشتق تابع $y=\sin(tg3x)$ به ازاء $x=0$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -2

۳) 3 ۴) 2

۱۵۲ــ مقدار مشتق $\cos xy^2+y\sin x=2$ در نقطه $(1, -\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1-\pi}$ ۲) $\frac{1}{1+\pi}$

۳) $1+\pi$ ۴) $1-\pi$

۱۵۳ــ اگر $f(0)=0$ و برای هر x در فاصله باز (۲ و ۰) مقدار $f'(x)$ برابر ۲ باشد $f(2)$ برابر است با:

۱) -4 ۲) 4

۳) -2 ۴) 2

۱۵۴ــ مشتق تابع $y=x|3x|$ برابر است با:

۱) $|3x|$ ۲) $2|3x|$

۳) $|9x|$ ۴) $\pm\sqrt{9x^2}$

۱۵۵ــ هرگاه مشتق تابع $f(x)$ برابر $2x-1$ باشد مشتق $f(x^2)$ برابر است با:

۱) $4x^3-2x$ ۲) $4x^2+1$

۳) $2x^2-x$ ۴) $4x^2-4x$

۱۵۶ــ اگر $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ باشد $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $-\sqrt{\frac{y}{x}}$ ۲) $\sqrt{\frac{y}{x}}$

۳) $\sqrt{\frac{x}{y}}$ ۴) $-\sqrt{\frac{x}{y}}$

۱۵۷ــ دیفرانسیل تابع $y=\cos^2\frac{1}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{-\sin 2x}{x^2}dx$ ۲) $\frac{\sin\frac{2}{x}}{x^2}dx$

۳) $\frac{-\sin 2x}{2x^2}dx$ ۴) $\frac{\sin 2x}{2x^2}dx$

۱۵۸ـ مشتق تابع y نسبت به x در عبارت [$xy=x+y$] برابر است با :

۱) $\frac{x-1}{1-y}$ است ۲) $\frac{1-y}{x-1}$ است

۳) $\frac{1}{4}x^2y^2$ است ۴) مشتق ندارد

۱۵۹ـ مشتق $y=\text{ArcCotg}(-\text{Cotg}x)$ در فاصله $0<x<\pi$ برابر است با :

۱) ۱ـ ۲) ۱

۳) $1+\text{Cotg}^2x$ ۴) هیچکدام

۱۶۰ـ تابع $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ در کدام فاصله نزولی است ؟

۱) (۱و ـ) ۲) (۳و۱)

۳) (∞ و۳) ۴) (۱و۳ـ)

۱۶۱ـ تابع $y=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-2$ در فاصله (صفر و ۲ـ) :

۱) صعودی است ۲) نزولی است

۳) ماکزیمم دارد ۴) می‌نیمم دارد

۱۶۲ـ تابع $y=x-2\sin x$ در کدام فاصله همواره نزولی است ؟

۱) $(\frac{2}{3},\pi)$ ۲) $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$

۳) $(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$ ۴) $(0,\frac{\pi}{6})$

۱۶۳ـ تابع $y=ax^2(x^2-1)-5$ به ازای مقدارهای منفی a :

۱) فقط یک ماکزیمم دارد ۲) یک می‌نیمم و دوماکزیمم دارد

۳) فقط یک می‌نیمم دارد ۴) یک ماکزیمم و دومی‌نیمم دارد .

۱۶۴ـ به ازاء چه مقدار m خط $y=mx$ ازنقطه‌می‌نیمم تابع $y=x^2-2mx+8$ می‌گذرد ؟

۱) ۳ ۲) ۱ـ

۳) ۱ ۴) ۱ـ

۱۶۵ـ به ازاء چه مقدار از منحنی نمایش‌تابع $y=\frac{ax+1}{x-1}$ محـور oy را با زاویهٔ 45° قطع می‌کند ؟

۱) ۲ ۲) ۲-
۳) ۱ ۴) ۱-

۱۶۶ـ منحنی $y=1+tgx$ محور x ها را تحت چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ رادیان ۲) $\frac{\pi}{3}$ رادیان
۳) $Arctg2$ ۴) صفر رادیان

۱۶۷ـ زاویه بین دو مماس رسم شده از نقطه $M\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.$ برمنحنی تابع $(y-2)^2=4x-2$ برابر است با:

۱) ۹۰ ۲) ۴۵
۳) ۱۳۵ ۴) $Arctg\pm1$

۱۶۸ـ معادله خط مماس برمنحنی $y(x+y)=1$ در نقطه (۱و۰) کدام است؟

۱) $-2y+x=2$ ۲) $2y+x=2$
۳) $2y-x=2$ ۴) $y+2x=2$

۱۶۹ـ ضریب زاویه خط مماس برمنحنی $xy^3=y^2+4$ در نقطه M(۱و۲) برابر است با:

۱) ۲- ۲) ۱-
۳) ۱ ۴) ۲

۱۷۰ـ در شکل محدود به محور Ox و سهمی $y=27-x^2$ مثلثی متساوی‌الساقین OAB چنان محاط شده‌است که مساحت آن ماکزیمم است. مساحت این مثلث برابر است با:

۱) ۳۶ ۲) ۴۸
۳) ۵۴ ۴) ۶۰

۱۷۱ـ منحنی $y=x+\sqrt{x}$ در مبداء مختصات بر کدام یک از خط های زیر مماس است؟

۱) محور x ها ۲) محور y ها
۳) خط $y=x$ ۴) خط $y=2x$

۱۷۲ـ خط D با محور x هازاویه 45° می‌سازدو درنقطه M برمنحنی نمایش‌تابع $\sqrt{x^3+x^2}$

مماس است . طول نقطه M کدامیک از مقدارهای زیر است ؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$

۳) $\frac{-۴}{۹}$ ۴) $-\frac{۸}{۹}$

۱۷۳ــ منحنی $y=x\cos x$ در مبداء مختصات برکدامیک از خطهای زیر مماس است ؟

۱) نیمساز ربع اول ۲) نیمساز ربع دوم

۳) محور x ها ۴) محور y ها

۱۷۴ــ ضریب زاویه قائم برمنحنی $2y=1+xy^3$ در نقطه‌ای به‌عرض ۱ برابراست‌با :

۱) ۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۱ــ

۱۷۵ــ منحنی‌های تابعهای $y=x\ ,\ y=\frac{4x-2}{x^2+1}$:

۱) درسه نقطه متقاطعند

۲) تنها دریک نقطه متقاطعند

۳) در دونقطه‌برهم مماسند

۴) دریک‌نقطه‌متقاطع ودریک‌نقطه‌برهم مماسند

۱۷۶ــ دسته خطهائی‌به معادلات $y=-4ax-2a^2+1$ بر کدامیک از منحنی هـای زیر همواره مماس است ؟

۱) $y=-6x^2+1$ ۲) $y=6x^2+2$

۳) $y=2x^2+1$ ۴) $y=-x^2$

۱۷۷ــ جهت تغییرات تابع $y=\frac{x^2-x}{-x^2+x+1}$ باجهت تغییرات کدامیک از تابعهای زیر برابر می‌باشد ؟

۱) $y=\frac{1}{x^2-x-1}$ ۲) $y=\frac{-1}{x^2-x-1}$

۳) $y=\frac{-x^2+x}{-x^2+x+1}$ ۴) $y=\frac{x^2-x}{x^2+x+1}$

۱۷۸ــ هرگاه نقطه $A\left|\begin{matrix}-4\\-1\end{matrix}\right.$ نقطه‌ی می‌نیـمم تابـع $y=\frac{ax+b}{x^2+2x+4}$ بـاشـد در

این صورت :

۱) $a=2$ ۲) $a=4$

۳) $a=6$ ۴) $a=0$

۱۷۹ــ هرگاه تابع $y=x^3-(m+2)x^2+3x$ همواره صعودی باشد در این صورت حدود برابر است :

۱) $0<m<3$ ۲) $-2<m<3$

۳) $-5\leqslant m\leqslant 1$ ۴) $-2\leqslant m\leqslant 3$

۱۸۰ــ به ازاءچه مقدار m خط $y=mx-1$ بر سهمی $y=2mx^2-2x$ مماس است ؟

۱) ۳ ۲) ۲ــ

۳) ۴ ۴) ۲

۱۸۱ــ برای اینکه از نقطه $M\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ بتوان دو مماس بر منحنی $xy=1$ رسم کرد لازم است :

۱) $ab>0$ ۲) $ab<0$

۳) $ab>1$ ۴) $ab<1$

۱۸۲ــ دسته‌خطهای D به معادله $x\cos\alpha+y\sin\alpha=2$ بر کدامیک از منحنی‌های زیر مماس است ؟

۱) $x^2-y^2=4$ ۲) $x^2+y^2=4$

۳) $x^2+y^2=1$ ۴) $x^2-y^2=1$

۱۸۳ــ مجموع ضریب‌زاویه‌های‌مماسهای رسم‌شده از نقطه (۱ــ و ۰) برمنحنی $y=x^2-x+1$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۱ــ

۳) ۲ ۴) ۲ــ

۱۸۴ــ از نقطه $A\left|\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right.$ چند قائم بر منحنی تابع $x^2-2y+4x+y^2=10$ می‌توان رسم کرد ؟

۱) فقط یک ۲) دو

۳) بیشمار ۴) هیچ

۱۸۵ــ تعداد نقطه‌هائی که مماس در این نقطه‌ها بر منحنی $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+1$ موازی با خط $4x+y+1=0$ شود کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

۱۸۶ــ زاویه حاده بین منحنی‌های $y=\sin x$ و $y=x+\sin x$

۱) از $\frac{\pi}{4}$ بزرگتراست ۲) برابر $\frac{\pi}{4}$ است

۳) از $\frac{\pi}{6}$ کوچکتراست ۴) برابر $\frac{\pi}{6}$ است

۱۸۷ــ کوچکترین مقدار جبری تابع : $y=x^3-3x+1$ در فاصله $-1<x<0$ برابر است با :

۱) ۳ ۲) ۱ــ

۳) ۱ ۴) ۳ــ

۱۸۸ــ معادله $y=\frac{C}{x+1}$ داده شده است خطوطی از نقطه‌هـــای (۲ــ و ۵) A و (۳ و ۰) B می‌گذرد و بر منحنی نمایش معادله مماس است مقدار C کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۱ ۴) ۱ــ

۱۸۹ــ درصورتی که $g(x)=f(-10x)$ و $g'(0)=a$ باشد $f'(0)$ برابراست با :

۱) $\frac{a}{10}$ ۲) $10a$

۳) $-\frac{a}{10}$ ۴) $-10a$

۱۹۰ــ ضریب زاویه خط مماس برمنحنی مکان هندسی $M(1-3\cos\alpha, 3\sin\alpha+1)$ در نقطه $A(x,y)$ برابر است با :

۱) $tg\alpha$ ۲) $Cotg\alpha$

۳) $-tg\alpha$ ۴) $-Cotg\alpha$

۱۹۱ــ ضریب زاویه مماس برمنحنی $y=x\sin x+\cos x$ در نقطه A به طول π برابر است با :

۱) π ۲) $-\pi$

۳) صفر ۴) بینهایت

۱۹۲ـ خط $y=2$ منحنی $y=x^2+2x+2$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند زاویه AOB برابر است با: (O مبداء مختصات)

۱) ۳۰ ۲) ۴۵

۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۱۹۳ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^4-3x^2+5$

۱) محور x ها را در چهارنقطه قطع می‌کند

۲) محور xها را در ۲ نقطه قطع می‌کند

۳) بر محور x ها مماس است

۴) محور x ها را قطع نمی‌کند.

۱۹۴ـ اگر $t=2\sin x, y=t^2-5$ باشد منحنی $y=f(x)$:

۱) محور x ها رادر دو نقطه قطع می‌کند.

۲) بر محور x ها مماس است

۳) بالای محور x واقع است

۴) زیر محور x ها واقع است.

۱۹۵ـ منحنیهای $y=\cos x$ و $x=\cos y$ نسبت به کدامیک از خطهای زیر قرینه یکدیگرند؟

۱) محور x ها ۲) محور y ها

۳) نیمسازربع اول ۴) نیمساز ربع دوم

۱۹۶ـ دو مماس از مبداءمختصات برمنحنی $x^2+8=8x-y^2$ رسم شده است زاویه بین دو مماس برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۹۷ـ اگر C منحنی تابع $y=f(x)$ باشد برای رسم منحنی $y=f(x+3)$ کافی است منحنی C را در صفحه مختصات برابر سه‌واحد انتقال داد. انتقال درکدام یک از

جهتهای زیر باید صورت گیرد؟

۱) درجهت مثبت ox ۲) درجهت منفی ox

۳) درجهت مثبت oy ۴) درجهت منفی oy

۱۹۸ـ منحنیهای $y=x^4+1$ و $y=x^2+2$ یکدیگر را:

۱) قطع نمی‌کنند

۲) دردونقطه‌قطع می‌کنندودریک‌نقطه‌برهم مماس‌اند

۳) درچهارنقطه‌قطع میکند

۴) در دونقطه قطع می‌کنند

۱۹۹ـ خط $y=m$ منحنی نمایش تابع $y=2x^2-3x$ را در دو نقطه M_1 و M_2 قطع می‌کند هرگاه زاویه M_1oM_2 قائمه باشد (o مبداء مختصات) m برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۰۰ـ منحنی تابع $y=x^3+x+a$ محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) هیچ

۲۰۱ـ اگر A محل تقاطع دومنحنی $y=\sin x$, $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ در فاصله $0<x<\frac{3\pi}{2}$ و O مبداء مختصات باشد نیم‌خط OA منحنی $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) یک ۲) دو

۳) سه ۴) چهار

۲۰۲ـ منحنی $y=x^{\frac{1}{4}}+10x^{\frac{1}{2}}+6$ محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) دو ۲) چهار

۳) هیچ ۴) یک

۲۰۳ـ منحنی $y=9x^9+7x^7+5x^5+x$ محور xها رادرچندنقطه قطع می‌کند؟

۱) پنج ۲) یک

۳) نه ۴) هفت

۲۰۴ـ اگر چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ ریشه مشترک نداشته باشند برای آنکه منحنی $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ محصور بین دو خط $y=0$ و $y=1$ باشد لازم است که :

۱) درجه $f(x)$ بیش از درجه $g(x)$ باشد

۲) 0 و 1 ریشه‌های $f(x)$ باشند

۳) $f(x)$ ریشه نداشته باشد .

۴) $g(x)$ ریشه نداشته باشد .

۲۰۵ـ طول وتر مشترک دایره‌های $x^2+y^2-3y=0$ و $x^2+y^2-3x=0$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۰۶ـ دو سهمی $y=\frac{x^2}{4}$, $y=1-\frac{x^2}{4}$ در دو نقطه A , B یکدیگر را قطع می‌کنند چهار ضلعی حاصل از برخورد چهارمماس به این دوسهمی درنقطه‌های A و B عبارت است از:

۱) یک متوازی‌الاضلاع ۲) یک لوزی

۳) یک مستطیل ۴) یک مربع

۲۰۷ـ کدامیک از خطهای زیر منحنی تابع $y=\frac{a}{\cos x}$ را همواره در یک نقطه قطع می‌کند" عدد حقیقی مثبت است .

۱) $y=0$ ۲) $y=x$

۳) $x=0$ ۴) $y=-x$

۲۰۸ـ خط $y=\frac{y}{10}$ منحنی نمایش تابع $y=\sin x$ را درچند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۷ ۴) ۹

۲۰۹ـ به‌ازاء بعضی از مقدارهای m تابع هموگرافیک $y=\frac{mx+1}{2mx-m}$ به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود این تابع ثابت کدام است؟

۱) $y+2=0$ ۲) $2y-1=0$

۳) $2y+1=0$ ۴) $y-2=0$

۲۱۰ـ منحنی تابع $y=\frac{x-m}{x^2+m}$ به ازاء همه مقدارهای $m\neq 0$ از دو نقطه ثابت A و B می‌گذرد معادله خط AB کدام است؟

۱) $y=1-x$ ۲) $y=1+x$

۳) $y=1$ ۴) $y=-1$

۲۱۱ـ معادله قطرهای دایره به صورت $mx+y+2=0$ می‌باشد فاصله مرکز دایره از مبداء مختصات برابر است با:

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۴

۳) ۲ ۴) ۱

۲۱۲ـ نقطه $M(a,b)$ روی دایره $x^2+y^2=2$ واقع است. خط D به معادله $ax+by=2$:

۱) ازنقطه M نمیگذر ۲) وتری از دایره است

۳) بردایره مماس است ۴) بادایره نقطه مشترک ندارد

۲۱۳ـ در تابع $y=(x^2-1)^2.(x+1)x$ نقطه‌ای به طول $x=1$:

۱) نقطه می‌نیمم است ۲) نقطه عطف است

۳) نقطه ماکزیمم است ۴) نقطه معمولی است

۲۱۴ـ معادله وتر مشترک دوتابع $y=\frac{2x+1}{2x-1}$ و $y=\frac{3(x+1)}{5x-3}$ کدام است؟

۱) $y=2x-1$ ۲) $y=4x-1$

۳) $y=-x-1$ ۴) $y=x$

۲۱۵ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{\sin x-3\cos x-4}{2-3\sin x\cos x}$ در کدام وضع قرار دارد؟

۱) همواره بالای محور x ها است ۲) در دو طرف محور x ها است

۳) همواره زیر محور x ها است ۴) بر محور x ها مماس است

۲۱۶ـ منحنی $y=\frac{1}{3\sin^2 x+2\sin x-1}$

۱) همواره بالای محور x ها است ۲) در دو طرف محور x ها است

۳) بر محور x ها مماس است ۴) پائین محور x ها است

۲۱۷ـ منحنی $y=\sin x+\sqrt{2}\cos x-2$

۱) همواره بالای محور x هااست ۲) در دو طرف محورx ها است

۳) بر محور x ها مماس است ۴) پائین محور xها است

۲۱۸ـ برای رسم منحنی $y=\frac{2+\sin 2x}{\sin 2x}$ **باید منحنی تابع** $y_1=\operatorname{tg}x+\operatorname{Cotg}x$ **را :**

۱) روی محور y ها و به طرف بالا انتقال داد

۲) روی محور y ها و به طرف پائین انتقال داد

۳) روی محور x ها و به طرف راست انتقال داد

۴) روی محور x ها و به طرف چپ انتقال داد .

۲۱۹ـ منحنی $y=\operatorname{Arctg}x+\operatorname{Arctg}\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}$ **محور x ها را :**

۱) دریک نقطه قطع می‌کند ۲) مماس برآن است

۳) دردو نقطه قطع می‌کند ۴) قطع نمی‌کند .

۲۲۰ـ نقطه‌های برخورد دو منحنی به معادلـه‌های $y=\sin x$ **و** $y=\frac{2}{\pi}x$ **عبـارت است از:**

۱) $(\pi$ و $1-)$ و $(1$ و $\frac{\pi}{2})$ و $(0$ و $0)$

۲) $(1-$ و $-\frac{\pi}{2})$ و $(1$ و $\frac{\pi}{2})$ و $(0$ و $0)$

۳) $(0$ و $\frac{\pi}{2})$ $(1-$ و $\frac{\pi}{2})$ و $(0$ و $1)$

۴) $(1-$ و $-\frac{\pi}{2})$ و $(1$ و $\frac{\pi}{2})$ و $(1$ و $1)$

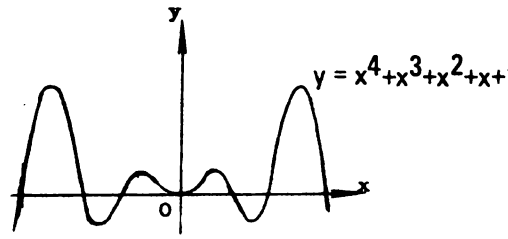
۲۲۱ـ منحنی نمایش تغییرات $y=\frac{x^2-2x+5}{x^2+4}$ **همواره**

۱) در دوطرف محورx ها است ۲) بالای محورx ها است

۳) زیر محور x ها است ۴) بر محور x ها مماس است

۲۲۲ـ منحنی کدامیک از تابعهای زیر به شکل داده شده شبیه است ؟

۱) $y=x\sin x$ ۲) $y=x+\sin x$

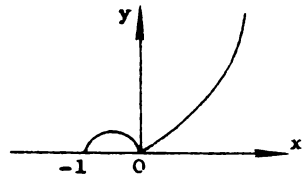


۳) $y=\frac{1}{\sin x}$ ۴) $y=x^4+x^3+x^2+x+1$

۲۲۳ـ منحنی کدامیک از تابعهای زیر به شکل زیر شبیه است؟

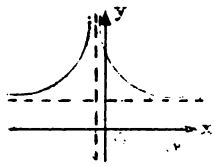
۱) $y=\sqrt{x^3+x}$ ۲) $y=\sqrt{x^3-x}$

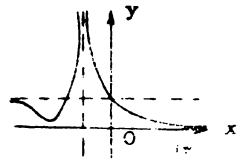
۳) $y=\sqrt{x^3+x^2}$ ۴) $y=\sqrt{x^3-x^2}$

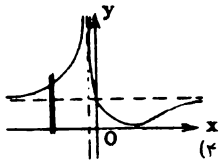


۲۲۴ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ به کدامیک ازمنحنی‌های زیر شبیه است؟

۱)

۲)


۳)


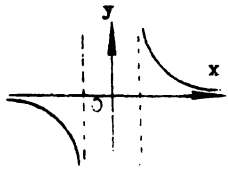
۴)


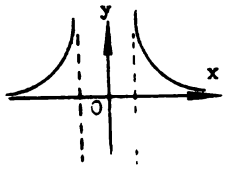
۲۲۵ـ نمایش $\mathrm{Arctg}x+\mathrm{Arctg}y=\frac{\pi}{4}$

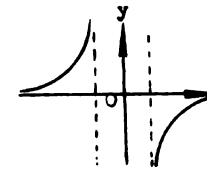
۱) دایره است ۲) منحنی هموگرافیک است

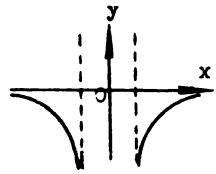
۳) منحنی مثلثاتی است ۴) دو خط است.

۲۲۶ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ به کدامیک ازمنحنی‌های‌زیرشبیه است؟

۱)


۲)


۳) 

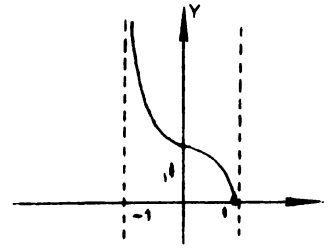
۴) 

۲۲۷ــ منحنی نمایش تابع $y=1+\sqrt{x}$:

۱) یک سهمی است
۲) یک بیضی است
۳) قسمتی از یک سهمی است
۴) قسمتی از یک بیضی است

۲۲۸ــ منحنی نمایش کدامیک از تابعهای زیر به شکل زیر شبیه است؟

۱) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
۲) $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
۳) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
۴) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

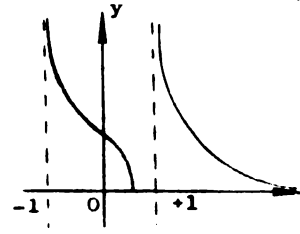


۲۲۹ــ منحنی نمایش $x(x-2)=y(y-2)$:

۱) یک هذلولی است
۲) دو نیم خط است
۳) دو خط موازی با یکدیگر است
۴) دو خط عمود بر یکدیگر است .

۲۳۰ــ شکل زیر به منحنی نمایش کدامیک از تابعهای زیر شبیه است؟

۱) $y=\sqrt{\frac{x-2}{x^2-1}}$
۲) $y=\sqrt{\frac{1-2x}{x^2-1}}$



۳) $y=\sqrt{\frac{2x+1}{x^2-1}}$ ۴) $y=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2-1}}$

۲۳۱ـ منحنی نمایش $x^2+y^2-2x+1=0$ کدام است؟

۱) بیضی ۲) دایره
۳) دوخط راست ۴) یک‌نقطه

۲۳۲ـ نمایش هندسی تابع $y=x-1-\sqrt{(x+1)^2}$ کدامیک از شکلهای زیر است؟

۱) بیضی ۲) دایره
۳) هذلولی ۴) دو نیم خط

۲۳۳ـ نمایش هندسی تابع $|x|+|y^2-4|=0$ عبارت است از:

۱) منحنی تابع درجه دوم ۲) دو خط راست
۳) دو خط عمود بر هم ۴) دو نقطه

۲۳۴ـ نمایش هندسی تابع $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ ، کدامیک از شکلهای زیر است؟

۱) دایره ۲) نیمدایره
۳) هذلولی ۴) نیمی از بیضی

۲۳۵ـ نمودار تابع $|x^2-1|+|4-y^2|=0$ کدام است؟

۱) دوخط ۲) یک‌هذلولی
۳) یک‌دایره ۴) چهارنقطه

۲۳۶ـ نمودار تابع $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$ کدام است؟

۱) یک‌سهمی ۲) قسمتی‌ازیک‌سهمی
۳) یک‌نقطه ۴) دو نیم خط

۲۳۷ـ نمودار تابع $y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2}$ در فاصله $-2\leqslant x\leqslant 1$ نمایش دهنده:

۱) قسمتی از یک سهمی ۲) دو نیم خط است
۳) یک پاره خط افقی است ۴) یک خط افقی است

۲۳۸ـ نمودار تابع $|x-1|+|y+2|=1$ عبارت است از:

۱) یک‌مربع ۲) یک نقطه

۳) دو نقطه ۴) دوخط عمودبرهم

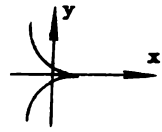
۲۳۹ـ به ازاء چه مقدارهای k نمایش هندسی تابع $x^2+3x-4y-2xy+K=0$ دو خط راست می‌باشد؟

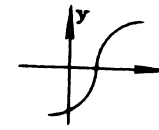
۱) $k=2$ ۲) $k=-1$

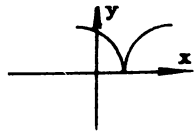
۳) $k=1$ ۴) $k=0$

۲۴۰ـ نمایش هندسی تابع $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ شبیه به کدامیک از شکلهای زیر است؟

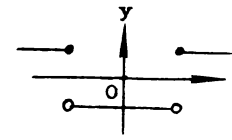
۱)

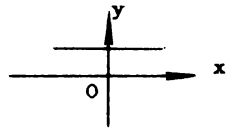
۲) 

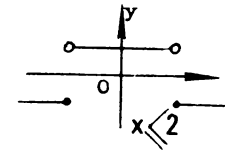
۳) 

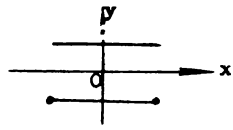
۴) 

۲۴۱ـ نمودار تابع $y=\dfrac{|x^2-4|}{4-x^2}$ شبیه به کدامیک از شکلهای زیر است؟

۱) 

۲) 

۳) 

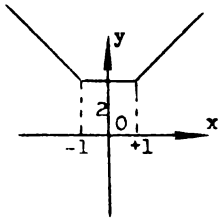
۴) 

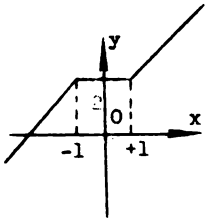
۲۴۲ـ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & x\leqslant 2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$ به ازاء عبارت است:

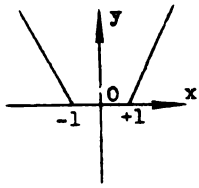
۱) یک منحنی و یک خط ۲) یک منحنی

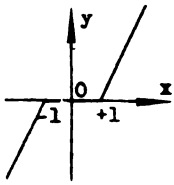
۳) یک‌قطعه‌منحنی‌ویک‌نیم‌خط ۴) یک‌قطعه منحنی‌ویک‌پاره خط

۲۴۳ــ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=|x+1|+|x-1|$ به کدامیک از شکلهای زیر شبیه است؟

۱)


۲)


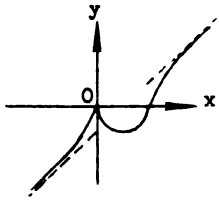
۳)


۴)


۲۴۴ــ منحنی نمایش تغییرات تابع $y+\sqrt{x^2-4}=0$ قسمتی از یک :

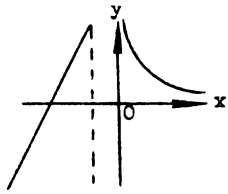
۱) دایره‌است
۲) بیضی‌است
۳) سهمی است
۴) هذلولی است

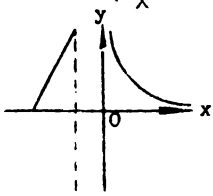
۲۴۵ــ شکل زیر منحنی نمایش کدامیک از تابعهای زیر می‌تواند باشد :

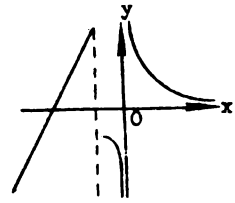


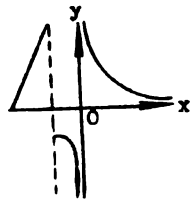
۱) $y=\sqrt[3]{x-2x^3}$
۲) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$
۳) $y=\sqrt[3]{x^3-2x}$
۴) $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$

۲۴۶ــ منحنی نمایش تغییرات تابع $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{به ازاء } x<-1 \\ \frac{1}{x} & \text{به‌ازاء } x\geqslant -1 \end{cases}$

۱)


۲)


۳)


۴)


۲۴۷ــ به ازاء چه مقدار از t مجموع ریشه‌های معادله زیر ماکزیمم است؟

$$(1+t^2)x^2-(2+t^2)x-(1+2t^2)=0$$

۱) ۲ــ
۲) صفر
۳) ۲
۴) بینهایت

۲۴۸ــ تابع $y=x^2+\frac{16}{x}$ دارای :

۱) می‌نیممی برابر ۱۲ است .
۲) می‌نیممی برابر ۸ است .
۳) ماکزیممی برابر ۸ است
۴) ماکزیممی برابر ۱۲ است .

۲۴۹ــ عدد درست و مثبت n داده شده است . برای اینکه عبارت :

$$(x-1)^2+(x-2)^2+(x-4)^2+\dots\dots\dots+(x-2^n)^2$$

کوچکترین مقدار را دارا باشد باید :

۱) $x=0$
۲) $x=2$
۳) $x=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$
۴) $x=\frac{2^n}{n+1}$

۲۵۰ــ در تابع $v=|x|$ $x=0$ طول نقطه :

۱) ماکزیمم است
۲) می‌نیمم است
۳) عطف است
۴) عادی است

۲۵۱ــ تابع $y=1-|x|$ در نقطه‌ای به طول صفر :

۱) دارای مشتق نیست
۲) نامعین است
۳) منفصل است
۴) دارای می‌نیمم است

۲۵۲ــ در تابع $y=x(2x-1)^5$ و $x=\frac{1}{2}$ طول نقطه ؟

۱) می‌نیمم است
۲) ماکزیمم است

۳) عطف است ۴) عادی است

۲۵۳ــ در تابع $y=(x^2-1)(x-1)x$ و $x=1$ طول نقطه ؟

۱) عطف است ۲) می‌نیمم است

۳) ماکزیمم است ۴) انفصال است

۲۵۴ــ تابع $y=-\frac{(2x-1)^2}{x^2+1}$ دارای :

۱) می‌نیممی برابر صفر است ۲) ماکزیممی برابر صفر است

۳) ماکزیمم ویا می‌نیمم نمی‌باشد ۴) ماکزیممی برابر ۱ است

۲۵۵ــ حاصلضرب ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y=\frac{2x^2+1}{x^2-x+1}$ برابر است با :

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۲۵۶ــ مقدار ماکزیمم تابع $y=\frac{-x^2+x-\frac{1}{4}}{4x^2+1}$ برابر است با :

۱) صفر ۲) ۴

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱۶

۲۵۷ــ هرگاه مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم تابع $y=\frac{x^2+mx+1}{(x+1)^2}$ برابر صفر باشد طول نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم برابر است با :

۱) ۱ ۲) $-m$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{m}{۲}$

۲۵۸ــ محور تقارن منحنی $y^2=x^3$ کدام است ؟

۱) نیمسازربع اول ۲) نیمسازربع دوم

۳) محور x ها ۴) محور y ها

۲۵۹ــ خط $y=-1$ محور تقارن کدامیک از منحنی‌های زیر است ؟

۱) $y^2+x^2+2x-4=0$ ۲) $x^2+y^2+2y-4=0$

۳) $y^2+y+x^3=0$ ۴) هیچکدام

۲۶۰ـ محور تقارن منحنی $y^3+x^3=1$

۱) محور x ها است
۲) محور y ها است
۳) نیمسازناحیه‌اول‌وسوم‌است
۴) نیمساز ناحیه‌دوم و چهارم است

۲۶۱ـ کدامیک از خطهای زیر محور تقارن منحنی $y=|x|+\sqrt{x^2+2}$ است؟

۱) خط $x=0$
۲) خط $y=x$
۳) خط $y=-x$
۴) خط $y=0$

۲۶۲ـ کدام خط محور تقارن منحنی $2y^2-x-4y+1=0$ است ؟

۱) $x=1$
۲) $x=-1$
۳) $y=-1$
۴) $y=1$

۲۶۳ـ کدام خط محور تقارن منحنی $x^2=y+6(1+\frac{x}{2})$ است؟

۱) $2x+3=0$
۲) $2x-3=0$
۳) $x-2=0$
۴) $x+2=0$

۲۶۴ـ مرکز تقارن منحنی تابع $(x+y+1)(x-y+7)=1$ کدامیک ازنقطه‌های زیر است؟

۱) (۱ـ و ۰)
۲) (۳و۴ـ)
۳) (۳ـ و ۴)
۴) (۰ و ۱ـ)

۲۶۵ـ کدامیک از منحنیهای زیر مرکز تقارن ندارد؟

۱) $y=x^3-x$
۲) $y=\frac{x-1}{x-2}$
۳) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$
۴) $y=\frac{x}{x^2-1}$

۲۶۶ـ تعداد محورهای تقارن کدامیک از منحنیهای زیر بیشتر است؟

۱) $x^2+y+1=0$
۲) $x^2-y^2+4=0$
۳) $x^2+y^2=2x-y$
۴) $x=\sqrt{3-y^2+2y}$

۲۶۷ـ کدامیک از خطهای زیر محور تقارن منحنی $x^2+y^2-2y-8=0$ می‌باشد؟

۱) $y=1$
۲) $x=0$

۳) $y=0$ ۴) $y=-1$

۲۶۸ـ کدامیک از نقطه‌های زیر مرکز تقارن منحنی $2xy-x+3=0$ می‌باشد؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(0,2)$

۳) $(0,\frac{1}{2})$ ۴) $(\frac{1}{2},2)$

۲۶۹ـ قرینه منحنی تابع $y=\frac{1}{|x|}$ نسبت به مبداء مختصات کدامیک از منحنی‌های زیر می‌باشد؟

۱) $y=\frac{1}{|-x|}$ ۲) $y=\frac{-1}{|x|}$

۳) $y=\frac{1}{x}$ ۴) $y=\pm\frac{1}{x}$

۲۷۰ـ قرینه منحنی $y=\frac{2x^2-5x+4}{2x^2+4}$ نسبت به نقطه (۱و۰) کدامیک از منحنیهای زیر است؟

۱) $y=\frac{2x^2+5x+4}{2x^2+4}$ ۲) $y=\frac{-2x^2+5x+4}{-2x^2+4}$

۳) $y=\frac{2x^2-5x+4}{2x^2+4}$ ۴) $y=\frac{-5x}{2x^2+4}$

۲۷۱ـ دو نقطه $A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right.$ نسبت به کدام یک از خطهای زیر قرینه یکدیگرند؟

۱) $x-y=5$ ۲) $x+y+5=0$

۳) $x+y=5$ ۴) $2x+y=8$

۲۷۲ـ محور تقارن منحنی $(y-3)^2=(x-1)^2(x+1)$ کدامیک از خطهای زیر است؟

۱) $y=x$ ۲) $y=-x+1$

۳) $y=3$ ۴) $y=-x$

۲۷۳ـ کدامیک از نقطه‌های زیر مرکز تقارن منحنی $y=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ است؟

۱) (۰ و ۱) ۲) (۱ و ۰)

۳) $(\frac{1}{2}$ و ۱) ۴) (۱ ـ و ۱)

۲۷۴ـ کدامیک از نقطه‌های زیر مرکز تقارن منحنی $y=x^3-3x+1$ است؟

۱) (۰ و ۱ـ)
۲) (۱ و ۱ـ)
۳) (۱ـ و ۳)
۴) (۰ و ۱)

۲۷۵ـ کدامیک از منحنیهای زیر محورهای تقارن بیشمار دارد؟

۱) $x^2+y+1=0$
۲) $x^2-y^2+4=0$
۳) $x^2+y^2=2x-y$
۴) $x+y^2+1=0$

۲۷۶ـ کدامیک از منحنیهای زیر محور تقارن دارد؟

۱) $y=x^3+x$
۲) $y=\sqrt{x-1}$
۳) $y=x+\sqrt{1-x^2}$
۴) $y=1+\sqrt{1-x^2}$

۲۷۷ـ کدامیک از منحنیهای زیر مرکز تقارن دارد؟

۱) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$
۲) $y=\frac{x-1}{x^2}$
۳) $y=x\pm\sqrt{x}$
۴) $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}$

۲۷۸ـ کدامیک از منحنیهای زیر فقط یک محور تقارن دارد؟

۱) $y^2-x^2=4$
۲) $y=x\pm\sqrt{x^2-1}$
۳) $y^2+x^2=2xy+x$
۴) $y=x^4+x^2+1$

۲۷۹ـ کدامیک از خطهای زیر محور تقارن منحنی $y=2+\sqrt{x^2-4x}$ است؟

۱) $x=2$
۲) $x=-2$
۳) $y=2$
۴) $y=x$

۲۸۰ـ نقطه‌ای به طول ۱+ برای کدامیک از منحنیهای زیر مرکز تقارن است؟

۱) $y=x^3+3x^2+1$
۲) $y=x|x|$
۳) $y=(x-1)^3+2x$
۴) $y=\frac{x-1}{x+1}$

۲۸۱ـ معادله قرینه منحنی $y=x^3-3x^2+1$ نسبت به نقطه (۰ و ۱) کدامیک از منحنیهای زیر است؟

۱) $y=x^3-3x^2+1$
۲) $y=x^3+3x^2+1$

۳) $y=-x^3+3x^2-1$ ۴) $y=x^3+3x^2-1$

۲۸۲ـ معادله قرینه منحنی $y=\frac{x-1}{x+1}$ نسبت بـه نقطـه (۱و۱ـ) ' O کدامیک از منحنی‌های زیر است؟

۱) $y=\frac{x+1}{x-1}$ ۲) $y=\frac{x+3}{x-1}$

۳) $y=1-\frac{2}{x+1}$ ۴) $y=1+\frac{2}{x+1}$

۲۸۳ـ قرینه منحنی تابع $y=Cos2x+LogSin^2x$ نسبت به محور ها کدام‌است؟

۱) $y=Cos2x-LogSin^2x$

۲) $y=-Cos2x-LogSin^2x$

۳) $y=-Cos2x+LogSin^2x$

۴) $y=Cos2x+LogSin^2x$

۲۸۴ـ منحنی $y=\frac{1+Sin^2x}{2}$

۱) فقط یک مرکز تقارن دارد ۲) تعدادمرکزهای‌تقارن آن بیشمار است

۳) دومرکز تقارن دارد ۴) مرکز تقارن ندارد

۲۸۵ـ منحنی $y=2Cos(\frac{3x}{4}-\frac{\pi}{3})$ **وقتی که** $0\leqslant x\leqslant 2$ **باشد؟**

۱) خط $x=\frac{4\pi}{3}$ محورتقارن‌آن‌است ۲) خط $y=\frac{4\pi}{9}$ محورتقارن آن است

۳) محورتقارن ندارد ۴) هیچکدام

۲۸۶ـ منحنی نمایش تغییرات $y=|1-Cos(x-\pi)|$

۱) قرینه منحنی $y=1-Cos(x-\pi)$ نسبت به‌محورy ها است

۲) قرینه منحنی $y=-1+Cos(x-\pi)$ " " "

۳) قرینه منحنی $y=1-Cos(x-\pi)$ " " ها است

۴) همان نمایش تغییرات $y=1-Cos(x-\pi)$ است

۲۸۷ـ مرکز تقارن مکان هندسی $M(\frac{1}{Cos\alpha}$ و $1+tg\alpha)$ **کدامیک از نقطـه‌هـای زیر است؟**

۱) $A(1,0)$ ۲) $B(0,0)$

۳) $C(0,1)$ ۴) $D(1,1)$

۲۸۸ـ اگر خط $y=x+1$ مجانب منحنی $y=g(x)+x-2$ در ناحیه اول باشد $\lim_{x\to\infty} g(x)$ برابر است با:

۱) -1 ۲) 3

۳) 1 ۴) -3

۲۸۹ـ ضریب زاویه مجانب مایل منحنی تابع $y=x+3+\sqrt{x^2-9}$ کدام است

۱) 1 ۲) 2

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) تابع مجانب مایل ندارد

۲۹۰ـ ضریب زاویه یکی از مجانبهای مایل منحنی نمایش $y=x\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ است با:

۱) 2 ۲) 1

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۲۹۱ـ کدامیک از خطهای زیر مجانب منحنی نمایش تابع $y=\sqrt{4x^2+1}-x$ است؟

۱) $y=x+1$ ۲) $y=x-2$

۳) $y=x-1$ ۴) $y=x$

۲۹۲ـ کدام یک از خطهای زیر مجانب منحنی $y^2=4x^2+16x-8y=4$ است؟

۱) $y=2x$ ۲) $y=-2x$

۳) $2y=x$ ۴) $2y=-x$

۲۹۳ـ یک مجانب منحنی $y=2x+\sqrt{x^2+x}$ موازی خط؟

۱) $y=x$ است ۲) $y=-x$ است

۳) $y=2x$ است ۴) $y=-2$ است

۲۹۴ـ منحنی نمایش تابع $y=\frac{\cos x}{3x+\cos x}$ چند مجانب دارد؟

۱) یک ۲) دو

۳) سه ۴) هیچ

۲۹۵ـ تابع $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$

۱) مجانب مایل دارد

۲) یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد

۳) دو مجانب افقی و یک مجانب قائم دارد

۴) مجانب مایل و مجانب قائم دارد

۲۹۶ـ تابع $y=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$ **دارای :**

۱) یک مجانب قائم است ۲) فقط یک مجانب افقی است

۳) دو مجانب افقی است ۴) دو مجانب افقی و یک مجانب قائم است

۲۹۷ـ تابع $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **دارای :**

۱) یک مجانب افقی و یک مجانب قائم است

۲) مجانب مایل است

۳) دو مجانب افقی است

۴) دو مجانب قائم است

۲۹۸ـ تابع $y=x+\sqrt{x^2+2x}$

۱) دو مجانب مایل دارد ۲) یک مجانب مایل و یک مجانب افقی دارد

۳) فقط مجانب افقی دارد. ۴) مجانب ندارد

۲۹۹ـ محور x ها خط مجانب کدامیک از منحنیهای زیر است؟

۱) $y=x+\sqrt{x-1}$ ۲) $y=2x-\sqrt{x^2+4}$

۳) $y=\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}$ ۴) $y=\frac{x-1}{x+1}$

۳۰۰ـ تابع $y=\frac{|x|}{x-1}$ **دارای :**

۱) یک مجانب افقی و یک مجانب مایل است

۲) فقط یک مجانب قائم است
۳) دومجانب افقی و یک مجانب‌قائم است
۴) مجانب نیست

۳۰۱ـ کدامیک از خطهای زیر مجانب تابع $y^2-3xy+2x^2-1=0$ است؟

۱) $y=-x$ ۲) $y=x-1$
۳) $y=2x$ ۴) $y=2x-1$

۳۰۲ـ هرگاه تابع $y=\frac{x-3}{x^2+mx+1}$ شامل یک‌خط مجانب‌قائم‌باشد m دارای :

۱) یک جواب است ۲) دو جواب است
۳) سه جواب است ۴) چهار جواب است

۳۰۳ـ اگر منحنی نمایش $y=ax+1+\sqrt{x^2+1}$ دارای یک مجانب افقی باشد در این صورت a برابر است با .

۱) $a=0$ ۲) $a=+1$
۳) $a=-1$ ۴) $a=\pm 1$

۳۰۴ـ کدام خط مجانب منحنی نمایش تابع $y=x-\sqrt{x^2+x-2}$ است؟

۱) $y=1$ ۲) $y=-1$
۳) $2y-1=0$ ۴) $2y+1=0$

۳۰۵ـ تابع $(x+1)y^2=x^2(x-1)$ دارای :

۱) یک مجانب قائم و یک مجانب افقی است
۲) دو مجانب افقی است
۳) یک مجانب قائم و یک مجانب مایل است
۴) دو مجانب مایل و یک مجانب قائم است

۳۰۶ـ مجانب منحنی تابع $y=x+\frac{\sin x}{x}$

۱) $y=x$ ۲) $y=x+1$
۳) $y=1, x=0$ ۴) مجانب ندارد

۳۰۷ـ برای منحنی $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$

۱) فقط $y=2x$ مجانب است

۲) $x=\frac{\pi}{2}$ و $y=2x$ مجانب است

۳) محور y ها و $y=2x$ مجانب است

۴) $x=0$ و $y=2x-1$ مجانب است

۳۰۸ـ منحنی $y=\operatorname{ArcCos}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

۱) مجانبی موازی محور y ها دارد ۲) مجانبی موازی محور x ها دارد

۳) محور x ها مجانب است ۴) مجانب ندارد

۳۰۹ـ به ازاء چه مقدار t مجموع مربعهای ریشه‌های معادله $x^2-(t-2)x+t^2-1=0$ ماکزیمم است؟

۱) ۲ـ ۲) ۱ـ

۳) صفر ۴) ۱

۳۱۰ـ وقتی x تغییر کند بزرگترین مقدار $a\sin x+b\cos x$ برابر است با:

۱) $|a+b|$ ۲) $|a-b|$

۳) $|a|+|b|$ ۴) $\sqrt{a^2+b^2}$

۳۱۱ـ مقدار ماکزیمم مساحتهای مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای که وتر آنها $\sqrt{8}$ باشد کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲

۳) $\sqrt{8}$ ۴) ۸

۳۱۲ـ اگر $ax+by=c$ باشد می‌نیمم عبارت x^2+y^2 برابر است با:

۱) $a^2+b^2-c^2$ ۲) $\frac{c^2}{ab}$

۳) $\frac{a+b}{c}$ ۴) $\frac{c^2}{a^2+b^2}$

۳۱۳ـ بین مستطیلهایی که مساحت آنها ۴ باشد می‌نیمم پیرامون (محیط) کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸

۳) ۶ ۴) ۴

۳۱۴ـ ماکزیمم عبارت $\frac{x^2}{1+x^4}$ برابر است با :

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۱۵ـ در معادله درجه دوم $x^2-(m^2-2m)x-(m^2+1)=0$ می‌نیمم مجموع ریشه‌ها برابر است با :

۱) صفر ۲) ۱ـ

۳) ۱ ۴) ۲

۳۱۶ـ می‌نیمم عبارت $A=x^4+y^4-2x^2+4y^2+7$ برابر است با :

۱) ۲ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۵

۳۱۷ـ ماکزیمم عبارت $y=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ برابر است با :

۱) ۴ ۲) ۱

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۸

۳۱۸ـ مقدار ماکزیمم عبارت $y=\frac{-x^2+2x-1}{2x^2+5}$ برابر است با :

۱) صفر ۲) ۲

۳) ۱ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

۳۱۹ـ اگر $x^2+y^2=2$ باشد می‌نیمم عبارت x^4+y^4 برابر است با :

۱) ۴ ۲) ۲

۳) ۸ ۴) ۱

۳۲۰ـ می‌نیمم عبارت $y=3^{\sin^2x}+3^{\cos^2x}$ کدام یک از عددهای زیر است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۶

۳۲۱ـ اگر $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ باشد ماکزیمم xy کدام است؟

۱) $\frac{a^2}{16}$ ۲) $\frac{a^2}{4}$

۳) $\frac{a}{4}$ ۴) $\frac{a}{2}$

۳۲۲ـ فاصله نزدیکترین نقطه منحنی $y^2=2x+4$ از مبداء مختصات برابر است با:

۱) 2 ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۳۲۳ـ فاصله نزدیکترین نقطه روی سهمی $y=x^2$ از خط $x-y=1$ برابر است با:

۱) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$

۳) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$

۳۲۴ـ فاصله دورترین نقطه دایره به معادله $x^2+y^2+2x-2y=0$ از مبداء مختصات کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) $\sqrt{2}$ ۲ ۴) $\sqrt{2}$ ۳

۳۲۵ـ نقطه متحرک M روی دایره $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ در حرکت است. کمترین فاصله این نقطه از نقطه A (۶و۲) برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

۳۲۶ـ نزدیکترین فاصله منحنی تابع $(x+3)^2+(y-4)^2=4$ از مبداء مختصات برابراست با:

۱) ۴ ۲) ۳

۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۳۲۷ـ اگر c مکان‌نقطه $M(x,y)$ ازصفحه‌و $|x|<3$, $|y|<4$ باشد فاصله

دورترین نقطه این مکان از مبداء مختصات کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۳۲۸ـ مکان هندسی نقطه $M(t^2 , 1+t^2)$ وقتی t تغییر می‌کند:

۱) قسمتی از یک دایره است ۲) یک دایره است

۳) قسمتی از یک خط است ۴) یک خط است

۳۲۹ـ مکان هندسی نقطه $A(\mathrm{Cotg}\alpha , \frac{1}{\mathrm{Cos}\alpha})$ وقتی که α تغییر می‌کند کدام است؟

۱) $y=\pm\frac{x^2}{1+x^2}$ ۲) $y=\frac{x^2+1}{x^2}$

۳) $y=\frac{1}{\mathrm{Cos}\alpha}(x-\mathrm{Cotg}\alpha)$ ۴) $y=\pm\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$

۳۳۰ـ مکان هندسی نقطه‌هائی که در معادله $4x(x-y)=1-y^2$ صدق می‌کند عبارت است از:

۱) دوخط متوازی ۲) یک‌خط

۳) یک‌بیضی ۴) دوخط عمود برهم

۳۳۱ـ مکان هندسی مرکز تقارن منحنی $y=\frac{x-a}{ax-4}$ وقتی که a تغییر می‌کند:

۱) دایره‌است ۲) خط راست‌است

۳) هذلولی‌است ۴) سهمی‌است

۳۳۲ـ در دایره به‌معادله $x^2+y^2=25$ وترهائی به طول ۸ رسم شده است. معادله مکان هندسی نقطه وسط این وترها کدام است؟

۱) $x^2+y^2=16$ ۲) $x^2-y^2=16$

۳) $x^2+y^2=9$ ۴) $x^2-y^2=9$

۳۳۳ـ مکان هندسی نقطه $A\left|\begin{array}{l}x=1-\mathrm{Cos}\alpha\\ y=2\end{array}\right.$ عبارت است از:

۱) یک نیم‌خط ۲) یک‌پاره‌خط

۳) یک‌خط راست ۴) دونیم‌خط

۳۳۴ـ مکان هندسی نقطه $M(\frac{1+\sin t}{\sin t}, 1-\sin t)$ وقتی t تغییر کند کدام است؟

۱) دایره ۲) هذلولی

۳) بیضی ۴) سهمی

۳۳۵ـ مکان هندسی نقطه $M(1+2\sin^2 \frac{t}{2}, 1-\sin t)$ وقتی t بین صفر و π تغییر کند کدام است؟

۱) ربع دایره‌ای واقع در بالای محور x ها

۲) نیمدایره‌ای واقع در زیر محور x ها

۳) نیمدایره‌ای واقع در بالای محور x ها

۴) ربع دایره‌ای واقع در زیر محور x ها

۳۳۶ـ مکان هندسی نقطه $M(2^t+2^{-t}, 2^t-2^{-t})$ کدام یک از منحنی‌های زیر است؟

۱) بیضی ۲) هذلولی

۳) قسمتی از هذلولی ۴) شاخه‌ای از هذلولی

۳۳۷ـ مکان نقطه‌هائی از صفحه که در شرط $1-x^2<2y^2$ صدق می‌کنند کدام است؟

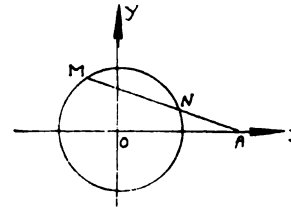
۱) داخل یک بیضی ۲) داخل یک دایره

۳) خارج یک بیضی ۴) خارج یک دایره

۳۳۸ـ از نقطه ثابت A قاطعی بر دایره مفروض (O) رسم می‌کنیم مکان هندسی نقطه H وسط وتر MN کدام است؟

۱) یک پاره خط ۲) یک دایره

۳) یک نیمدایره ۴) کمانی از دایره



۳۳۹ـ مکان هندسی نقطه برخورد دو خط که بر دو نقطه ثابت O و A مرور کرده و با یکدیگر

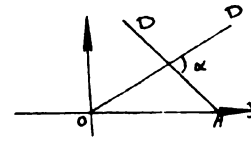
زاویه ثابت α را تشکیل می‌دهند کدام است؟

۱) خط عمود بر OA

۲) یک دایره

۳) کمانی ازدایره‌که OA وترآن‌است

۴) دوکمان‌ازدودایره‌که OA وترمشترک‌آنها است .



۳۴۰ـ دورهٔ تناوب تابع $y=a\cos\frac{1}{x}$ برابر است با :

۱) $\frac{1}{2\pi}$ ۲) $\frac{1}{\pi}$

۳) $\frac{1}{a\pi}$ ۴) هیچکدام

۳۴۱ـ دوره تناوب $y=|1-2\sin 2x|$:

۱) π ۲) 2π

۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) دوره تناوب ندارد

۳۴۲ـ دوره تناوب $y=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}x+2}{\sin\frac{\pi}{2}x-\cos\frac{\pi}{2}x}$ برابر است با :

۱) 8π ۲) 12

۳) 6 ۴) 8

۳۴۳ـ دوره تناوب $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ برابر است با :

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π

۳) 2π ۴) $\frac{\pi}{3}$

۳۴۴ـ دوره تناوب $y=\cot g 2x-tg 2x-1$ برابر است با :

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$

۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) هیچکدام

۳۴۵ـ دوره تناوب $y=\sin 180x^{\circ}+\cos 100x^{g}$ برابر است با:

۱) π ۲) 2π

۳) ۴ ۴) دوره‌تناوب‌ندارد

۳۴۶ـ دوره تناوب $y=\sin(\cos x)$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π

۳) ۴ ۴) دوره تناوب ندارد

۳۴۷ـ دوره تناوب $y=\cos(\sin x)$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π

۳) ۲ ۴) دوره‌تناوب‌ندارد

۳۴۸ـ دوره تناوب تابع $y=x\sin\frac{3x}{2}+1$ کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ۲) 4π

۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) دوره‌تناوب ندارد

۳۴۹ـ دوره تناوب $y=\cos(\frac{17\pi}{2}+x)\sin^3 x$ برابر است با:

۱) 2π ۲) π

۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) دوره تناوب ندارد

۳۵۰ـ دوره تناوب $y=\dfrac{\cos(\frac{3\pi}{4}-2x)-\sin x}{3\sin 2x-1}$ برابر است با:

۱) π ۲) 2π

۳) $\frac{5\pi}{2}$ ۴) دوره تناوب ندارد

۳۵۱ـ دوره تناوب $y=\left|\cos\frac{3x}{4}\right|$ برابر است با:

۱) $\frac{8\pi}{3}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$

۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) دوره تناوب ندارد

۳۵۲ـ قسمت موهومی عدد $\frac{3-i}{2+i}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱ـ

۳) ۵ ۴) ۵ـ

۳۵۳ـ حاصلضرب دو عدد مختلط $(1+2i)$, $(3-4i)$ کدام است؟

۱) $11+2i$ ۲) $11-2i$

۳) $-11+i$ ۴) $-11-2i$

۳۵۴ـ مقدار $(1-2i)^{-2}$ کدام است؟

۱) $\frac{-3-4i}{25}$ ۲) $\frac{3-4i}{25}$

۳) $\frac{4i+3}{25}$ ۴) $\frac{4i-3}{25}$

۳۵۵ـ حاصل $\frac{1}{64}(1-i)^{18}$ کدام است؟

۱) $8i$ ۲) $-8i$

۳) ۸ـ ۴) ۸

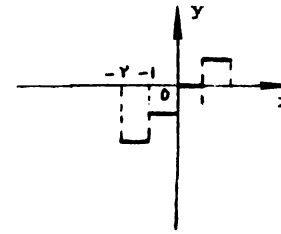
۳۵۶ـ بزرگترین جزء صحیح عددی مانند x عددی است صحیح مانند n به طوری که $n<x<n+1$ بزرگترین جزء صحیح عدد $-\sqrt{10}$ کدام است؟

۱) ۲ـ ۲) ۳ـ

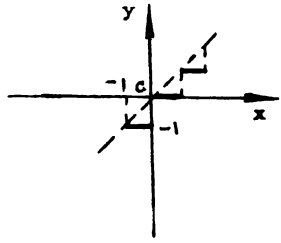
۳) ۴ـ ۴) ۵ـ

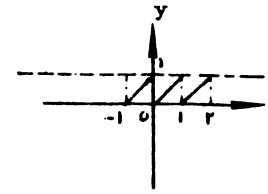
۳۵۷ـ نمودار تابع $y=x-[x]$ به کدامیک از شکلهای زیر شبیه است؟

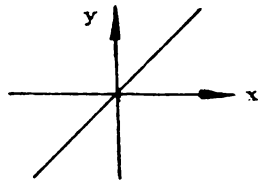
۱)



۲)



۳) 

۴) 

۳۵۸ـ تابع اولیه تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x}+3)^{\frac{1}{5}}$ عبارت است از:

۱) $\frac{6}{5}(2\sqrt{x}+3)^{\frac{5}{6}}$ ۲) $\frac{5}{6}(2\sqrt{x}+3)^{\frac{6}{5}}+c$

۳) $\frac{6}{5}(2\sqrt{x}+3)^{\frac{6}{5}}$ ۴) $\frac{5}{6}(2\sqrt{x}+3)^{\frac{5}{6}}+c$

۳۵۹ـ تابع اولیه تابع $y=\frac{\cos 2x}{1+\cos 2x}$ عبارت است از:

۱) $x+tgx+c$ ۲) $x-tgx+c$

۳) $x+\frac{1}{2}tgx+c$ ۴) $x-\frac{1}{2}tgx+c$

۳۶۰ـ اگر $f'(x^2)=\frac{1}{|x|}$ باشد $f(x)$ برابر است با:

۱) $\sqrt{x}$ ۲) $\frac{1}{x}$

۳) $2\sqrt{x}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{x}$

۳۶۱ـ تابع اولیه $\frac{(x^2-1)^2}{(x+1)^6}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}\cdot\frac{x-1}{(x+1)^3}$ ۲) $\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x+1)^3}$

۳) $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(x+1)^8}$ ۴) $\frac{1}{6}\cdot(\frac{x-1}{x+1})+c$

۳۶۲ـ معادله منحنی‌هائی که از نقطه $A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ گذشته و قائمهای هرنقطه آن از مبداء مختصات بگذرد کدام است؟

۱) $y^3=x^2-1$ ۲) $4x^2+y^2=4$

۳) $x^2=1-y^2$ ۴) $x^2-xy=1$

۳۶۳ـ در صورتی که $f'(x)$ مشتق تابع $f(x)$ و $xf'(x)+f(x)=1$ باشد $f(x)$ عبارت است از:

۱) $Cx+1$ ۲) $\frac{C}{x}+1$

۳) $Cx-1$ ۴) $\frac{C}{x}-1$

۳۶۴ـ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی یک‌تابع درنقطه $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ به صورت $\frac{x-1}{y-2}$ است و منحنی از مبداء مختصات می‌گذرد معادله تابع عبارت است‌از:

۱) $(y-2)^2-(x-1)^2=1$ ۲) $(x-1)^2+(y-2)^2=3$

۳) $(y-2)^2-(x-1)^2=1$ ۴) $(x-1)^2-(y-2)^2=3$

۳۶۵ـ اگر $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ باشد کدام رابطه درست است؟

۱) $g'(x)=f(x)$ ۲) $f'(x)=g(x)$

۳) $g(x)=f(x)$ ۴) $g(x)=f(x)-f(a)$

۳۶۶ـ حاصل انتگرال $\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۳۶۷ـ حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x\,dx$ کدام است؟

۱) $۱-\frac{\pi}{4}$ ۲) $۱+\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) ۱

۳۶۸ـ سطح محصور بین منحنی $y=\cos 2x$ و دو محور مختصات برابر است با:

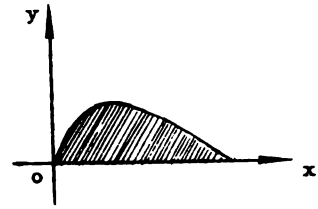
۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۳۶۹ـ مساحت سطح محدود بین محور x ها و منحنی نمایش $y=\cos x\sqrt{\sin x}$ در فاصله $(0,\frac{\pi}{2})$ (شکل روبرو) برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{5}$



۳۷۰ـ اگر مساحت سطح محصور بین منحنی $y=(\cos x)^6$ و محور X ها و دو خط $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ برابر با a باشد مساحت سطح محصور بین همین منحنی و محور X ها و دو خط $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{2}$ برابر است با:

۱) $3a$ ۲) $2a$

۳) $2\pi a$ ۴) $3\pi a$

۳۷۱ـ اندازه مساحت سطح محصور بین خط $y-x+1=0$ و محور X ها و خطهای $x=0$ و چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۳۷۲ـ مساحت سطح محصور بین منحنیهای $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۳۷۳ـ سطح محصور بین منحنیهای $y-x^2=0$, $y^3=x^2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{4}{15}$

۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۳۷۴ـ اندازهٔ مساحت سطح محصور بین منحنیهای $y=\sqrt{1-x^2}$ و $2y=\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{8}$ ۲) $4\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۳۷۵ـ اندازهٔ حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y=\frac{2}{x}$ و خطهای $x=-1$ و $x=-2$ حول محور x ها کدام است؟

۱) 4π ۲) 3π

۳) 2π ۴) π

۳۷۶ـ سطح محصور بین منحنی $y^2=1-x$ و خط $x=0$ حول محور عرضها دوران می‌کند، حجم حاصل برابر است با:

۱) $\frac{16\pi}{15}$ ۲) $\frac{8\pi}{15}$

۳) $\frac{11\pi}{15}$ ۴) $\frac{15\pi}{8}$

۳۷۷ـ یک طاق از منحنی $y=\cos 2x$ حول محور طولها دوران می‌کند حجم حاصل برابر است با:

۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$

۳) $\frac{2\pi^2}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۳۷۸ـ بیضی به‌معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول محور بلندتر و بار دیگر حول محور کوتاهتر دوران می‌کند نسبت دو حجم حاصل برابر است با:

۱) $\frac{a^2}{b^2}$ ۲) $\frac{a^2}{b}$

۳) $\frac{b^2}{a}$ ۴) $\frac{b}{a}$

۳۷۹ـ سطح محصور بین سهمی $y^2=2px$ وخط $x=a$ را حول محور طولها دوران می‌دهیم حجم حادث برابر است با:

۱) $\pi a^2 p$ ۲) $\pi a p$

۳) $\frac{1}{2}\pi a^2 p$ ۴) $\pi a p^2$

۳۸۰ـ سطح محصور بین‌منحنی $x^2+y^2+2x=0$ ومحور x ها را حول محور x ها دوران می‌دهیم حجم حادث برابر است‌با :

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) π

۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

۳۸۱ـ سطح محصور بین منحنی $y=x\sqrt{x+1}$ و محور x ها را حول محور x ها دوران می‌دهیم حجم حادث برابر است با :

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{12}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۳۸۲ـ حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی $x^2+y^2+2x=0$ وخط $y=x+1$ وقتی منحنی حول خط دوران کند برابر است با :

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{4\pi}{3}$

۳۸۳ـ حجمی که از دوران سطح محصور بین محور y ها و خط $y=2$ و منحنی تابع $y=x^2$ در حول محور y ها پدید می‌آید برابر است با :

۱) $\frac{8\pi}{3}$ ۲) $\frac{16\pi}{3}$

۳) 2π ۴) 4π

۳۸۴ـ سطح محصور بین قطعه‌ای از منحنی تابع $y^2+x=0$ و محور x ها و خط $x=-1$ در حول محور y ها دوران می‌کند حجم شکل حاصل کدام است ؟

۱) $\frac{\pi}{5}$ ۲) $\frac{4\pi}{5}$

۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

۳۸۵ـ دامنه تابع $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$ کدام است ؟

۱) $x \geqslant 1$ ۲) $x \leqslant 1$

۳) $x = 1$ ۴) تهی است

۳۸۶ـ دامنه تابع $y = \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

۱) $x > 1$ ۲) $x < 1$

۳) $x = 1$ ۴) تهی است

۳۸۷ـ تابعهای $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ داده شده است دامنه تابع fog کدام است؟

۱) $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ۲) $x=-1, x=1$

۳) $x = 0$ ۴) تهی است

۳۸۸ـ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ کدام است؟

۱) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ ۲) $2 \leqslant x \leqslant 3$

۳) $]-\infty, -2] \quad [2, +\infty[$ ۴) $x < 0$

۳۸۹ـ دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{1-[x]}$ کدام است؟

۱) $x \geqslant 0$ ۲) $-\infty < x < +\infty$

۳) $x \leqslant 1 \quad x \geqslant 2$ ۴) $R - [1, 2[$

۳۹۰ـ دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{|x| - [x]}$ کدام است؟

۱) $x > 0$

۲) $x < 0$

۳) $-\infty < x < +\infty$ بجز اعداد صحیح

۴) $-\infty < x < +\infty$ بجز اعداد صحیح مثبت و صفر

۳۹۱ـ برد تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $y \geqslant 1$ ۲) $-\infty < y < +\infty$

۳) $y \geqslant 0$ ۴) $y > 0$

۳۹۲ـ برد تابع $f(x) = x - \sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $y \geqslant 0$ ۲) $-\infty < y < +\infty$

۳) $y \geqslant -1$ ۴) $y \geqslant -\frac{1}{4}$

۳۹۳ـ برد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1}$ کدام است؟

۱) $-\infty < y < +\infty$ ۲) $y > 1$

۳) $y < -1$ ۴) $-1 < y < 1$

۳۹۴ـ برد تابع $f(x) = \frac{2x^2 + 2x}{x^2 + x + 1}$ کدام است؟

۱) $y \geqslant 2$ ۲) $y \leqslant 2$

۳) $-\frac{2}{3} \leqslant y \leqslant 2$ ۴) $-2 < y < 2$

۳۹۵ـ برد تابع $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ کدام است؟

۱) $-\infty < y < \infty$ ۲) $y \geqslant 1$

۳) $0 < y \leqslant 1$ ۴) $y > 0$

۳۹۶ـ برد تابع $f(x) = x - (x)$ کدام است؟

۱) $-\infty < y < +\infty$ ۲) $y \geqslant 0$

۳) $0 \leqslant y < 1$ ۴) $y = 0$

۳۹۷ـ تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در کدام یک از فاصله زیر معکوس‌پذیر است؟

۱) $-\infty < x < \infty$ ۲) $0 \leqslant x \leqslant 2$

۳) $-2 \leqslant x \leqslant 0$ ۴) $1 \leqslant x \leqslant 3$

۳۹۸ـ تابع $f(x) = x - \sqrt{x}$ در کدام یک از فاصله‌های زیر معکوس‌پذیر است؟

۱) $x \geqslant 0$ ۲) $0 \leqslant x \leqslant 1$

۳) $1 \leqslant x \leqslant 2$ ۴) دردامنه تعریفش

۳۹۹ـ کدام یک از تابعهای زیر در دامنه تعریفشان معکوس‌پذیرند؟

۱) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - x}$ ۲) $y = |x^3|$

۳) $y = 2x - \sqrt{x}$ ۴) $y = x - \sqrt{x^2 + 4}$

۴۰۰ـ تابع معکوس تابع $f(x)=x+\sqrt{2x}$ کدام است؟

۱) $y=x+1-\sqrt{2x+1}$ ۲) $y=x+1+\sqrt{2x+1}$

۳) $y=2x+\sqrt{x}$ ۴) هیچکدام

۴۰۱ـ تابع معکوس تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$ کدام یک از تابعهای زیر است؟

۱) $y=\frac{2x+1}{x+2}$ ۲) $y=\frac{x-2}{2x-1}$

۳) $y=\frac{2x-1}{x-2}$ ۴) $y=\frac{x-1}{2x-1}$

۴۰۲ـ تابع معکوس تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ در صورتی که $0\leqslant x\leqslant 1$ باشد کدام است؟

۱) $y=-\sqrt{1-x^2}$ ۲) $y=\sqrt{1-x^2}$

۳) $y=\sqrt{1+x^2}$ ۴) $y=\sqrt{x^2-1}$

۴۰۳ـ کدام یک از تابعهای زیر در دامنه تعریفشان معکوس‌پذیر نیست؟

۱) $y=x^3+2x$ ۲) $y=\sqrt{x}$

۳) $y=\frac{\sqrt{x^2-2ax}}{x-a}$ ۴) $y=\sqrt{x^2-2x}$

۴۰۴ـ معادله خط مماس برمنحنی تابع معکوس تابع $f(x)=\sqrt{x^3+1}$ در نقطه‌ای به طول ۳ واقع برمنحنی تابع معکوس کدام خط زیر است؟

۱) $2y+x-1=0$ ۲) $x+y=5$

۳) $2y+x+1=0$ ۴) $2y-x-1=0$

جواب پرسشهای جبر و آنالیز
راهنمای تعیین جواب درست

شماره تست	شماره جواب	
۱	۱	$xSinx=(-x)Sin(-x)=xSinx$
۲	۱	$f(x+a)=f(x) \longrightarrow f(x-a)=f(x)$ $f(x+a)-f(x-a)=0$
۳	۴	$f(x)=f(x+\frac{\pi}{2}) \longrightarrow$ دوره تناوب این تابع $\frac{\pi}{2}$ است $tg2x=tg2(x+\frac{\pi}{2}) \longrightarrow$ دوره تناوب این تابع نیز است " به مبحث تناوب مراجعه شود" در نتیجه $f(x)$ تابعی از $tg2x$ میباشد
۴	۱	کافی است بجای x مقدار $\frac{1}{y^2}$ و به جای y مقدار $\frac{1}{x^2}$ قرار داده شود. $f(\frac{1}{y^2},\frac{1}{x^2})=\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=\frac{x+y}{x-y}$
۵	۲	"فرمولهای لگاریتم درس حساب $fog(x)=a^{Log_a x}=x$
۶	۴	$fog(x)=\frac{Sinx-\|3Sinx\|}{2}=\frac{Sinx+3Sinx}{2}=2Sinx$ زیرا $"x<0 \longrightarrow \|3Sinx\|=-3Sinx"$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۷	۴	$x>0 \longrightarrow \lvert x\rvert = x \longrightarrow f(x)=x \longrightarrow gof(x)=x^2$
۸	۱	$z=\dfrac{\operatorname{Log}_a x+\operatorname{Log}_a y}{\operatorname{Log}_a \sqrt{xy}}=\dfrac{\operatorname{Log}_a xy}{\operatorname{Log}_a \sqrt{xy}}=\dfrac{\operatorname{Log}_a xy}{\frac{1}{2}\operatorname{Log}_a xy}=2$
۹	۲	$f(z)=f(x)+f(y) \longrightarrow \operatorname{Log}(1-z)=\operatorname{Log}(1-x)+\operatorname{Log}(1-y)$ $\operatorname{Log}(1-z)=\operatorname{Log}(1-x)(1-y) \longrightarrow 1-z=1-(x+y-xy)$ $z=x+y-xy$
۱۰	۴	$\dfrac{x}{x-1}=\alpha \longrightarrow x=\dfrac{\alpha}{\alpha-1} \longrightarrow f(\alpha)=\dfrac{1}{1-\alpha}$ $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$
۱۱	۲	$x-1=1+\alpha \longrightarrow x=\alpha+2$ $f(1+\alpha)=(\alpha+2)^3 \longrightarrow f(1+x)=(x+2)^3$
۱۲		$4-x=y \longrightarrow f(y)+2f(-y)=3(4-y) \quad (1)$ y را به $-y$ تبدیل کرده نتیجه‌میشود $f(-y)+2f(y)=3(4+y)$ (۲) از دو رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. $f(-y)+2f(y)=3(4+y)$
۱۳	۱	باتوجه به رابطه پائین $f(\frac{1}{y})=f(1)-f(y)=-f(y)$ $f(1)=f(\frac{1}{1})=f(1)-f(1)=0$
۱۴	۳	$\sqrt{(-x)^2+(-x)+1}-\sqrt{(-x)^2-(-x)+1}=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}=-y$
۱۵	۴	اگر x به $-x$ تبدیل شودعبارت تابع بکلی تغییر میکند. $\dfrac{1}{\operatorname{Cos}(-2x)}-\operatorname{Sin}(-2x)=\dfrac{1}{\operatorname{Cos}2x}+\operatorname{Sin}2x\neq y$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۱۶	۲	$f(-x)\sin 2x-f(x)\cos 2x=2x$ باتبدیل x به -x نتیجه میشود $-f(x)\sin 2x-f(-x)\cos 2x=-2x$ از دو رابطه (۱) و (۲) نتیجه‌میشود $f(x)=-2x(\cos 2x-\sin 2x)$
۱۷	۱	$f(-x)=\mathrm{Log}(-x+\sqrt{x^2+1})=\mathrm{Log}\,\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$ $=\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$
۱۸	۳	$x\geqslant 0 \longrightarrow \lvert x\rvert=x \longrightarrow y=\dfrac{x+x}{2}=x$ $x<0 \longrightarrow \lvert x\rvert=-x \longrightarrow y=\dfrac{x-x}{2}=0$
۱۹	۲	$g(x)\dfrac{a^x+b^x}{a^{x-2}+b^{x-2}} \longrightarrow g(3)=\dfrac{a^3+b^3}{a+b}$ $g(3)=a^2-ab+b^2$
۲۰	۱	$gof(x)+fog(x)=(x+1)^2+(x+1)^2=2(x+1)^2=2g(x)$
۲۱	۲	$f(x^2-1)=x^2-1+k \qquad f(2)=R=3+k=0 \longrightarrow k=-3$
۲۲	۲	$x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0 \longrightarrow x=2,\ x=-1$ $ax2^3-4x2^2-bx2+6=0$ $ax(-1)^3-4x(-1)^2-bx(-1)+6=0$ $\begin{cases}8a-2b=10\\-a+b=-2\end{cases}$ $a=-b=1$
۲۳	۳	بجای x^2 مقدار (۱) قرارداده میشود . $x^6=1,\ 3x^5=3x,\ -2x^4=-2$ $R=1+3x-2+1-x+1=2x+1$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۲۴	۴	$f(x)=(4x-1)q(x)+5$ $f(x^2)=(4x^2-1)q(x^2)+5 \longrightarrow (2x+1)(2x-1)q(x^2)+5$ $R=5$
۲۵	۱	$f(x)=(2x^3-3x+1)q(x)+x^2+x+1$ $2x^3-3x+1=(x-1)(2x^2+2x-1),\quad x^2+x+1=(x-1)(x+2)+3$ $f(x)=(x-1)(2x^2+2x-1)q(x)+(x-1)(x+2)+3$ $R=3$
۲۶	۴	$f'(x)=3x^2+6x \qquad x+2=0 \longrightarrow x=-2$ $f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4=0$ $f'(-2)=3(-2)^2+6(-2)=0$
۲۷	۴	$x-a-b=0 \longrightarrow x=a+b$ $R=(a+b-a)(a+b-b)+k=0$ $b.a+k=0 \longrightarrow k=-ab$
۲۸	۴	$x^3+ax^2+(b+1)x+1\equiv(x^2+bx+1)(cx+d)$ باتوجه به ضریب x^3 و مقدار ثابت طرف اول لازم است $c=d=1$ و از آنجا $x^3+ax^2+(b+1)x+1\equiv x^3+(b+1)x^2+(b+1)x+1$ $a=b+1$
۲۹	۴	باقیمانده تقسیم حاصلضرب دوتابع بریک عبارت برابراست باباقیمانده تقسیم حاصلضرب باقیمانده‌های آن دو تابع بر آن عبارت" به‌مطالب درسی مراجعه شود." $x(x+1)=x^2+x=x^2+x+1-1 \longrightarrow R=-1$
۳۰	۱	$\left.\begin{array}{l}R_1=f(1)=a+b\\R_2=f(2)=2a+b\end{array}\right\} \longrightarrow b=1 \longrightarrow R=x+1$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۱	۱	چون دو عبارت از یک درجه بوده و ضریب بزرگترین درجه آنها نیز با هم مساویست باید آنها متحد باشند. $x^4+ax^3+bx^2+cx+d\equiv x^4+4x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a=4$
۳۲	۱	$x^3+2x^2-1\equiv(x+1)(x^2+x-1)$ $x^2+x-1=0 \longrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ $x^3+2x^2-1=(x+1)(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2})(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2})$
۳۳	۳	$a^{12}+1=(a^4)^3+1=(a^4+1)(a^8-a^4+1)$
۳۴	۱	درحاصلضرب چند عبارت درجه اول ضریب x^{n-1} برابر است با $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ضریب $x^4=\sum_{1}^{5} x_i=-1+2-2+6-5=0$
۳۵	۱	۲۷= مقدارثابت + مجموع ضریبهای جمله‌های شامل توانهای $f(1)=x$ ۸ـ = حاصلضرب مقدارهای ثابت = مقدار ثابت عبارت ۳۵ = مجموع ضریبهای جمله‌های مطلوب
۳۶	۱	(۱) علامت جمله چهارم منفی است و توان $\sqrt{2}$ دراین جمله برابر ۳ می‌باشد بنابراین بدون هیچگونه محاسبه $\sqrt{2}$ ۲۰ـ نتیجه میشود. (۲) با استفاده از فرمول. جمله چهارم $=-\frac{n(n-1)(n-2)}{3}a^{n-3}b^3=-\frac{5\times4\times3}{6}\times1^2\times(\sqrt{2})^3$ $=-20\sqrt{2}$
۳۷	۳	در بسط دو جمله‌ای نیوتن جمله وسط بزرگترین ضریب را دارد بنابراین دراین تست جمله ششم دارای بزرگترین ضریب است.

شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۸	۳	$f(1)=(m-1)^{100}=2^{100} \longrightarrow m-1=\pm 2 \longrightarrow m=3,-1$
۳۹	۱	در جمله‌سوم باید مجموع نماهای پایه‌های a برابر صفر باشد. $(a^{\frac{2}{3}}+a^{-1})^n$, جمله سوم $=\frac{n(n-1)}{2}.a^{\frac{2}{3}(n-2)}.a^{-2}+\ldots\ldots$ $\frac{2}{3}(n-2)+(-2)=0 \longrightarrow n=5$
۴۰	۲	جمله‌هائی ازاین‌بسط گویا هستند که درآنها نمای $\sqrt{a}$ عدد زوج ونمای $\sqrt[5]{b}$ مضرب ۵ باشد" با توجه به آنکه مجموع نماهای $\sqrt{a}$ و $\sqrt[5]{b}$ برابر ۳۲ = h است" نماهای $\sqrt{a}$ ← ۳۲ ۲۲ ۱۲ ۲ نماهای $\sqrt[5]{b}$ ← صفر ۱۰ ۲۰ ۳۰
۴۱	۳	چون n زوج است یا $a=b$ یا $a=-b$ درهردوحالت $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert=0$
۴۲	۴	$a(1+x)-b(1-x)\equiv 2$ $a-b=2 \quad a+b=0 \longrightarrow a=-b=1$
۴۳	۱	$\frac{a(\sqrt{3}+1)^2-b(\sqrt{3}-1)^2}{2}=2a-2b+\sqrt{3}(a+b)$ $a+b=0 \longrightarrow a=-b$
۴۴	۱	$a-b+c=0 \quad 4a+2b+c=0$ از حذف a بدست میآید. $c-2b=0$
۴۵	۲	$\Delta_1=m^2-4n=0$ $\Delta_2=m^2-4(n-2)=m^2-4n+8=0$ $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ دارای‌دو ریشه گنگ است

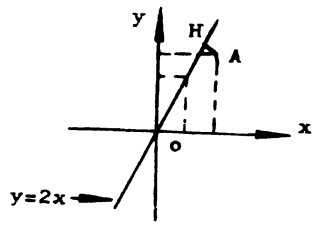
شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۴۶	۴	$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}=\frac{-p}{1-4}=\frac{p}{3}$
۴۷	۳	$\frac{Logab}{Loga.Logb}=\frac{Loga+Logb}{Loga.Logb}=\frac{-2m}{-3}=\frac{2m}{3}$
۴۸	۳	$\frac{1}{SinxCosx}=tgx+Cotgx=-\frac{b}{a}=-1$
۴۹	۱	$(m-2)x+x-2m=0 \longrightarrow m-2=\frac{-1}{2-m} \longrightarrow m=3,1$ بافرض $m\neq 2$ $(\frac{m+3}{2-m})x^2+x-\frac{1}{2-m}=0$ معادله‌دوم "جواب $m=3$ درتساوی $\frac{m+3}{2-m}=-2m$ صدق می‌کند"
۵۰	۲	$af(2)<0$ $(m+1)(6m-6)<0 \longrightarrow -1<m<1$
۵۱	۳	$af(1)<0 \longrightarrow 1-m+m-2=-1<0$
۵۲	۱	باید $af(-1)=2-2m<0$ $af(0)=-m<0$ باشد.
۵۳	۲	(1) $af(-2)<0 \longrightarrow 4m+3<0 \longrightarrow m<-\frac{3}{4}$ (2) $af(2)>0 \longrightarrow 3-4m>0 \longrightarrow m<\frac{3}{4}$
۵۴	۱	وقتی‌قدرمطلق مجموع با مجموع قدر مطلقها برابر میشود که دو مقدار هم علامت باشند. $xy\geqslant 0$
۵۵	۲	$\frac{m'}{2m-3}\neq\frac{2}{-2} \longrightarrow m\neq 1$
۵۶	۱	$\sqrt{x^3+1}=-(x+1) \longrightarrow x^3+1=x^2+2x+1$

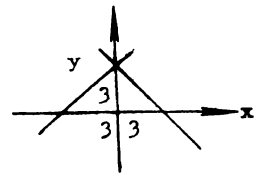
شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		$x(x^2-x-2)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{cases}$ جواب قابل قبول
۵۷	۳	$x'=\frac{2}{x''} \longrightarrow x'x''=2 \longrightarrow 2m=2 \longrightarrow m=1$
۵۸	۲	$\sqrt{x^2-1}=3-x^2 \longrightarrow x^4-7x^2+10=0$ $\quad x^2=5$ $\quad x^2=2$ فقط $x^2=2$ در معادله صدق میکند بنابراین $x=\pm\sqrt{2}$ دو جواب دارد
۵۹	۴	$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y=-1 \\ 4x^2+y^2-8x-2y=-1 \end{cases} \longrightarrow 3x^2-6x=0$
۶۰	۱	$x^4(x-2)-4(x-2)=0 \longrightarrow (x-2)(x^4-4)=0$ $x=2,\ x^2=2 \longrightarrow x=\pm\sqrt{2}$
۶۱	۱	باید مجموع وحاصلضرب ریشه‌ها عدد گویا باشد بنابراین $x''=2-\sqrt{3}$
۶۲	۳	$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=0 \longrightarrow x=1,2$ $x=1 \longrightarrow x^4+2x^3-4x^2+3x-2=1+2-4+3-2=0$ $x=2 \longrightarrow 16+16-16+6-2\neq 0$ تنها $x=1$ ریشه معادله است
۶۳	۳	$\Delta'=4-4m<0 \longrightarrow m>1$
۶۴	۱	$a \longrightarrow 0,\ b\neq 0 \longrightarrow m=-1$
۶۵	۳	" مطالب درس جبر " $q=0 \longrightarrow a+2=0 \longrightarrow a=-2$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۶۶	۲	$y=x^3+6x^2+12x+9 \longrightarrow y'=3x^2+12x+12=3(x+2)^2$ منحنی تابع محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند معادله یک ریشه حقیقی دارد
۶۷	۴	مجموع سه جمله مثبت $100, 2x^2, x^6$ همواره مخالف صفر است
۶۸	۳	چون $(x-1)+2(2-x)+(x-3)=0$ است با توجه به مطالب درس خواهیم داشت $(x-1)^3+8(8-x)^3+(x-3)^3=2(x-1)(2-x)(x-3)=0$ $x=1,2,3$
۶۹	۴	"مطالب بخش پذیری" $y'=4x^3+4=0 \longrightarrow x=-1$ (۱-) باید ریشه معادله $x^4+4x+m=0$ باشد $1-4+m=0 \longrightarrow m=3$
۷۰	۲	$a=1 \quad b=2 \quad k=3 \longrightarrow k>b-a$
۷۱	۳	"با توجه به مطالب درس جبر" $y_s=1, \quad k=3 \longrightarrow k>y_s$
۷۲	۱	"با توجه به مطالب درس جبر" $y_s=4, \quad k=1 \longrightarrow 0<k<y_s$
۷۳	۴	$x=\frac{z-1}{2} \longrightarrow \left\|\frac{z-1}{2}-1\right\|<2 \longrightarrow \|z-3\|<4 \longrightarrow$ $-4<z-3<4$ $-1<z<7$
۷۴	۴	$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)$ $E=-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\leqslant 0$
۷۵	۲	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2a}{xy}$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		چون $x+y=2a$ است ماکزیمم xy برابر a^2 میشود" مطالب مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم عبارتها" درنتیجه $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{2a}{a^2} \longrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{2}{a}$
۷۶	۱	$(n-1)(n-7)<0 \longrightarrow 1<n<7$ $n=2,\ 3,\ 5,\ 6$
۷۷	۳	جوابهای $x<-1$ و $x>3$ هر دو در نامعادله صدق می‌کند و هر دو شرط کافی است نه لازم پس $1<x<3$ قابل قبول است .
۷۸	۲	$-2<x<1$ تنهاجوابی است که در نامعادله صدق می‌کند .
۷۹	۳	$\lvert(x-1)(x^2+x+1)\rvert\leqslant x^2+x+1 \longrightarrow \lvert x-1\rvert\leqslant 1$ $-1\leqslant x-1\leqslant 1$ $0\leqslant x\leqslant 2$ "مطالب درس جبر"
۸۰	۴	هرگاه $a<0$ آنگاه $a+\frac{1}{a}\leqslant -2$ مطالب درس جبر
۸۱	۱	$\lvert x+2\rvert<x^2 \longrightarrow -x^2<x+2<x^2$ $\begin{cases} x^2-x-2>0 \longrightarrow x>2,\ x<-1 \\ x^2+x+2>0 \longrightarrow \end{cases}$ همه مقدارهای حقیقی x
۸۲	۴	(۱) $\left\lvert\frac{2-3x}{2x}\right\rvert<\frac{1}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2}<\frac{2-3x}{2x}<\frac{1}{2}$ $\begin{cases} \frac{2-3x}{x}-1<0 \\ \frac{2-3x}{x}+1>0 \end{cases}$ $\frac{1}{2}<x<1$ یا (۲) با امتحان جوابها میشود $\frac{1}{2}<x<1$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۸۳	۴	$\frac{-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=-\cos\frac{\alpha}{2}$
۸۴	۲	$d=\frac{\lvert n-n'\rvert}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{5}{\sqrt{1+1}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ "مطالب درس جبر"
۸۵	۴	باتوجه به مطالب درس جبرمعادله خط متساوی‌الفاصله از دوخط داده شده $y=mx+\frac{n+n'}{2} \longrightarrow y=3x+\frac{7-3}{2}$ $y=3x+2$
۸۶	۱	$m_\Delta=\frac{4}{3} \longrightarrow y=\frac{4}{3}x+n$ $2=\frac{\lvert n\rvert}{\sqrt{\frac{16}{9}+1}}=\frac{3\lvert n\rvert}{5} \longrightarrow n=\pm\frac{10}{3}$ $y=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3} \longrightarrow 4x-3y+10=0$
۸۷	۳	$y=x+2 \;:\; y=2 \longrightarrow x_1=0,\; 2y+x=2m \;:\; x_2=2m-4$ $d=\lvert x_2-x_1\rvert=\lvert 2m-4\rvert=4 \longrightarrow m=4,0$
۸۸	۱	فاصله نقطه A از خط $y=2x$ نصف قطر مربع است و مساحت‌مربع برابر یک قطر ضربدر نصف قطر دیگر میباشد .



شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		$AH=\frac{\lvert 4-3\rvert}{\sqrt{4+1}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ $S=\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\times 5}{25}=\frac{2}{5}$
۸۹	۲	$-(x+1)<x-1<x+1 \longrightarrow 2x>0 \longrightarrow x>0$
۹۰	۲	(1) $y>0 \longrightarrow 2m-4>0 \longrightarrow m>2$ (2) $x>y \longrightarrow m-1>2m-4 \longrightarrow m<3$ $2<m<3$
۹۱	۲	ضریب زاویهٔ خط دوران یافته برابر ۱ بوده و طول از مبداءخط منفی است $y-x=3$ 
۹۲	۳	فاصله مبداء مختصات ازخط $ax+by+c=0$ برابر است با $\frac{\lvert c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$ چون در این تست مقدار ثابت معادله‌ها مساوی است مبداء به خطی نزدیکتر است که a و b بزرگتر باشد. $\frac{1}{\sqrt{9+4}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$ فاصله کمتر
۹۳	۲	$\lvert\frac{n+1}{n}-1\rvert=\lvert\frac{1}{n}\rvert<\frac{1}{\sqrt{10}} \longrightarrow n>\sqrt{10}$ $n\geqslant 4$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۹۴	۴	حدراست $f(x)=\text{حد}_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$ حدچپ $f(x)=\text{حد}_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{1-x}=-2$
۹۵	۴	حد راست $=\frac{10}{3+3^{-\infty}}\longrightarrow\frac{10}{3}$ حدچپ $=\frac{10}{3+3^{\infty}}\longrightarrow 0$
۹۶	۴	چون $\lim_{x\to 0} y=2$ میباشد پس y حداقل شامل بعضی از مقدارهای x مثبت میباشد.
۹۷	۱	$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(\sin^2 x)^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}(\frac{2x}{\sin 2x})^2=\frac{1}{4}$
۹۸	۱	$\lim_{x\to 2} y=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}=0$
۹۹	۳	$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\lim\frac{4(\frac{x}{2})^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=2$
۱۰۰	۴	$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}}=\frac{\text{ضریب بزرگترین درجه‌صورت}}{\text{ضریب بزرگترین درجه مخرج}}=\sqrt{3}$

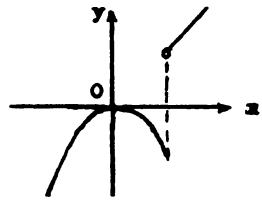
شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۱۰۱	۱	$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{x\pi}{2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\operatorname{Cotg}\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}(1+\operatorname{Cotg}^2\frac{x\pi}{2})}=\frac{2}{\pi}$
۱۰۲	۲	$\operatorname{ArcCos}x=\alpha$ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1-\operatorname{Cos}^2\alpha}{\alpha^2}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha})^2=1$
۱۰۳	۲	(۱) وضع سه‌تابع ۱) و۳) و ۴) ازنظر وجود $\lvert x-2\rvert$ مشابه هم می‌باشد پس هیچکدام نمی‌تواند جواب مسئله باشد .لذاجواب ۲) نتیجه میشود . $=\frac{(x-2)^2}{\lvert x-2\rvert}\begin{cases} x-2\geqslant 0 & \lim\limits_{x\to 2}y=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0^+ \quad (۲) \\ x-2<0 & \lim\limits_{x\to 2}y=\lim\limits_{x\to 2}(2-x)=0^+ \end{cases}$ پس دارای حد است
۱۰۴	۲	$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{3x+2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}{x(3+\frac{2}{x})}=\frac{2}{3}$
۱۰۵	۴	$\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x}-2x+5}=-\frac{1}{2}$
۱۰۶	۱	$[y=\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x+\operatorname{Sin}x}{x-\operatorname{Cos}x}]=\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1+\frac{\operatorname{Sin}x}{x}}{1-\frac{\operatorname{Cos}x}{x}}=1$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۱۰۷	۴	$y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \text{حد}_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$
۱۰۸	۴	$\lim\limits_{x\to 0} x\sin x \sim \lim\limits_{x\to 0} x^2$ " درس مربوط به حد و یادآوری‌ها " $\text{حد}_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} = \text{حد}_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{2x} = \frac{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}}{2} = -\frac{1}{a}$
۱۰۹	۲	$\text{حد}_{n\to\infty}\frac{2+3+\dots+n}{n^2+n-2} = \text{حد}_{n\to\infty}\lim\frac{(n-1)(\frac{n+2}{2})}{(n^2+n-2)}=\frac{1}{2}$
۱۱۰	۱	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{2\sqrt{x^3-2x}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{3x^2-2}{\sqrt{x^3-2x}}}{1}=5$
۱۱۱	۴	$\text{حد}_{x\to 0}\frac{4\cos 4x}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \text{حد}_{x\to 0} 8\sqrt{x+1}\cos 4x=8$
۱۱۲	۱	$\text{حد}_{x\to 0} f(x) = \text{حد}_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}}{1}=\frac{1}{3}$
۱۱۳	۳	$\text{حد}_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\cot g x)}{\cot g x} = \text{حد}_{x\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۱۱۴	۳	$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\dfrac{2x-2\lvert x\rvert+3}{3x+\lvert x\rvert+2}=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{4x+3}{2x+2}=2$
۱۱۵	۳	$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}=1$
۱۱۶	۱	$\underset{x\to0}{\text{حد}}\dfrac{\text{Sinax}}{\text{tgax}}=1$ وقتیکه $\underset{x\to0}{\text{حد}}\dfrac{\text{SinxSin2xSin3x...Sinnx}}{\text{tgxtg2xtg3x...tgnx}}$ برابر ۱ است" مطالب درس حد یا $\underset{x\to0}{\text{Cos}}\,x\,\text{Cos}\,2x\,\text{Cos}\,3x\ldots\text{Cos}\,nx=1$
۱۱۷	۲	$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^{n-1}+3^{n-1}}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{3^{n+1}[(\frac{2}{3})^{n+1}+1]}{3^{n-1}[(\frac{2}{3})^{n-1}+1]}$
۱۱۸	۳	$\underset{x\to\infty}{\text{Lim}}y=\dfrac{a}{p}-\dfrac{b}{q}$ $q=3,\ b=0,\ p=2,\ a=3$ $\underset{x\to\infty}{\text{Lim}}y=\dfrac{3}{2}-0=\dfrac{3}{2}$
۱۱۹	۳	$\underset{x\to\infty}{\text{Lim}}y=\text{Lim}\left(\dfrac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\underset{x\to\infty}{\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$
۱۲۰	۴	$y=\underset{x\to0}{\text{Lim}}\dfrac{\text{Sin}\frac{5\pi}{180}x}{x-\text{Sin}\frac{2\pi}{180}x}=\underset{x\to0}{\text{Lim}}\dfrac{\frac{\pi}{36}\text{Cos}\frac{\pi}{36}x}{1-\frac{\pi}{18}\text{Cos}\frac{\pi}{90}x}=$

شماره شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		$\dfrac{\frac{\pi}{36}}{1-\frac{\pi}{18}} = \dfrac{\pi}{2(18-\pi)}$
۱۲۱	۴	$\frac{3-x}{x-1}\geqslant 0 \longrightarrow 1<x\leqslant 3$, $\frac{x-1}{2-x}\geqslant 0 \longrightarrow 1\leqslant x<2$ جواب مشترک $1<x<2$
۱۲۲	۳	$\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}$ $\frac{1+x}{1-x}\geqslant 0 \longrightarrow 1\geqslant x>-1$ $\frac{1}{2}>x>-1$
۱۲۳	۴	جواب ۱ به ازاء مقدارهائی از x که زیر رادیکال منفی میشود وجواب۳ به ازاء ریشه‌های مخرج منفصل میباشد .
۱۲۴	۳	چون متغیر تابع شامل ۱ و ۱ـ نیست پس نقطه اتصال ندارد .
۱۲۵	۴	$f(0)=4$ $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ چون حد تابع در نقطه‌ای به طول صفر با مقدار $f(0)$ برابرنمی‌باشد لذا تابع منفصل است .
۱۲۶	۱	$(x+y)^2=2x \longrightarrow x\geqslant 0$ $y=-x\pm\sqrt{2x} \longrightarrow x\geqslant 0$
۱۲۷	۴	$x=1 \longrightarrow f(1)=\frac{0}{0}$ مقدار $f(1)$ مشخص نیست $\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$
۱۲۸	۳	$x<0 \longrightarrow y=\frac{x+1}{2x}$, $x\neq 0 \longrightarrow$ تابع متصل است

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۱۲۹	۳	$x=0 \longrightarrow y=\sqrt{-x^2(x+1)^2}=0$
۱۳۰	۳	ریشه مخرج $1-\sqrt{1-x^2}=0 \longrightarrow x=0$ $1-x^2\geqslant 0 \longrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$ درفاصله $-1\leqslant x<0,\ 0<x\leqslant 1$ تابع معین است.
۱۳۱	۳	$\frac{2+3x}{3-2x}\geqslant 0 \longrightarrow -\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}$
۱۳۲	۲	$\mathrm{Cos}\,x\geqslant 0 \longrightarrow -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Sin}\,x-\frac{1}{2}\geqslant 0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$ فاصله انتخاب شده $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ فاصله مشترک دوتابع $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$
۱۳۳	۱	$x=\frac{\pi}{3} \longrightarrow y=\frac{\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3})}{4\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{3}-1}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}$
۱۳۴	۲	باتوجه به شکل تابع به ازاء $x=2$ منفصل است
۱۳۵	۳	$1-\mathrm{Sin}\frac{x}{2}=0 \longrightarrow x=\pi,\ \mathrm{tg}\,x\longrightarrow\infty \longrightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$
۱۳۶	۱	$\mathrm{ArcSin}\frac{1}{x}$ کمانی است بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$
۱۳۷	۳	مفهوم مشتق
۱۳۸	۱	$y=x+4-x=4 \longrightarrow y'=0$



شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۱۳۹	۱	$f(x)\frac{x^2}{2} \longrightarrow f(\frac{1}{x})=\frac{1}{2x^2} = \longrightarrow f'(\frac{1}{x})=\frac{-1}{x^3}$
۱۴۰	۳	$x=-\frac{\pi}{2} \longrightarrow \lvert Sinx\rvert=-Sinx$ $\frac{x^2(-Sinx-3Sinx)}{2Sinx}=-2x^2, y'=-4x$ $y'=2\pi \qquad (-\frac{\pi}{2})$
۱۴۱	۴	$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=\frac{Cosy+yCosx}{-xSiny+Sinx}=\frac{Cosy+yCosy}{xSiny-Sinx}$
۱۴۲	۲	$\frac{UV'+VU}{VV'}=0 \longrightarrow UV'+VU'=0 \longrightarrow (UV)'=0$ $UV=C\underline{\underline{te}}$
۱۴۳	۱	$y=f(U) \longrightarrow y'=U'f'(U)$ $y=f(x^2) \longrightarrow y'=2xf'(x^2)$
۱۴۴	۴	$y=ff(x) \longrightarrow f(x)=U \longrightarrow y=f(U)$ $y=U'f'(U) \longrightarrow y'=f'(x).f'f(x)$
۱۴۵	۱	$y=x.x^3+x^3(\sqrt[3]{x^3}+1) \qquad (۱)$ $f_{x^3}=x^3(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^6}})+(\sqrt[3]{x^3}+1)\times 1=\frac{x}{3}+x+1=\frac{4}{3}x+1$ یا $y=x^4+x^3,\ x^3=z \qquad y=z\sqrt[3]{z}+z \qquad (۲)$ $y'=\sqrt[3]{z}+\frac{z}{3\sqrt[3]{z^2}}+1=x+\frac{x^3}{3x^2}+1$ $y'=\frac{4}{3}x+1$

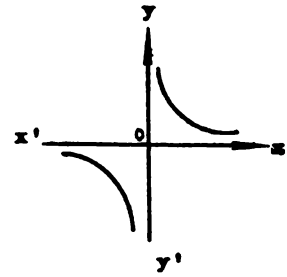
شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۱۴۶	۳	$g(x)=x\sqrt{x^2} \longrightarrow g'(x)=\sqrt{x^2}+x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2}}$ $g'(x)=\lvert x\rvert+\frac{(\lvert x\rvert)^2}{\lvert x\rvert}=2\lvert x\rvert$
۱۴۷	۳	$x^0=(\frac{\pi}{180}x)^R \longrightarrow g(x)=\mathrm{Sin}\frac{\pi}{180}x$ $g'(x)=(\frac{\pi}{180}\ \mathrm{Cos}\frac{\pi}{180}x=\frac{\pi}{180}\mathrm{Cos}x^0$
۱۴۸	۳	$\mathrm{Lim}_{\Delta x \to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}=f''(x)=24x$
۱۴۹	۱	$y'=tg^2x=(x+y)^2$ $tgx=x+y \longrightarrow y=tgx-x$
۱۵۰	۱	$f(a-\Delta x)=g(a) \longrightarrow f(a+\Delta x)=g(a+2\Delta x)$ $\mathrm{Lim}_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}=\mathrm{Lim}_{\Delta x \to 0}\frac{g(a+2\Delta x)-g(a)}{2\Delta x}=g'(a)=f'(a)$
۱۵۱	۳	$y=\mathrm{Sin}u \longrightarrow y'=u'\mathrm{Cos}u=3(1+tg^23x)\mathrm{Cos}(tg3x)$ $x=0 \longrightarrow y'_{(0)}=3$
۱۵۲	۲	$y'=\frac{-f'x}{f'y}=\frac{y^2\mathrm{Sin}xy^2-y\mathrm{Cos}x}{-2xy\mathrm{Sin}xy^2+\mathrm{Sin}x}=\frac{\mathrm{Sin}(-\frac{\pi}{2})-\mathrm{Cos}(-\frac{\pi}{2})}{\pi\mathrm{Sin}(-\frac{\pi}{2})+\mathrm{Sin}(-\frac{\pi}{2})}=\frac{+1}{\pi+1}$
۱۵۳	۲	$f'(x)=2 \longrightarrow f(x)=2x+c$ چون $f(0)=0$ است ، پس : $f(2)=4\ ,\ f(x)=2x$

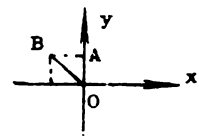
شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۱۵۴	۲	$y=x\sqrt{9x^2} \longrightarrow y'=\lvert 3x\rvert+\frac{\lvert 2x\rvert^2}{\lvert 3x\rvert}=2\lvert 3x\rvert$
۱۵۵	۱	$[f(u)]'=u'f'(u) \longrightarrow [f(x^2)]'=2xf'(x^2)=$ $2x(2x^2-1)=4x^3-2x$
۱۵۶	۱	$y'=\frac{-2\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$
۱۵۷	۲	$dy=-2\frac{-1}{x^2}.\mathrm{Cos}\frac{1}{x}.\mathrm{Sin}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{x^2}\mathrm{Sin}\frac{2}{x}.dx$
۱۵۸	۴	به تعریف $y=E(x)$ یا $y=\lvert x\rvert$ مطالب درس جبر توجه شود.
۱۵۹	۱	"مبحث آرکها مثلثات" $y=\mathrm{ArcCotg}(-\mathrm{Cotg}x)$ $0<x<\pi \longrightarrow \begin{cases} y=\pi-x \\ y'=-1 \end{cases}$
۱۶۰	۲	$y'=x^2-4x+3=0 \longrightarrow x=1,3$ $y'<0 \longrightarrow 1<x<3$
۱۶۱	۱	$f(-2)=\frac{8}{3}-4-6-2=-\frac{28}{3}$, $f(0)=-2$ (1) یا صعودی است $y'=-x^2-2x+3=0 \longrightarrow x=-3,1$ $-3<-2<0<1$ در فاصله ۰ و ۲ـ مشتق تابع مثبت است و تابع صعودی است
۱۶۲	۴	$y'=1-2\mathrm{Cos}x<0 \quad \mathrm{Cos}x>\frac{1}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$

شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		$-\frac{\pi}{3}<0<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$
۱۶۳	۲	$y'=2ax(x^2-1)+2ax^3=4ax^3-2ax=0$ $x=0 \quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f''(x)=y''=12ax^2-2a$ صفرطول نقطه‌می‌نیمم و $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ طول نقطه‌های ماکزیمم‌است $f'(0)=-2a>0$
۱۶۴	۴	$x=-\frac{b}{2a}=m$, $y=\frac{4ac-b^2}{4a}=8-m^2$ $y=mx \longrightarrow 8-m^2=m^2 \longrightarrow m=\pm 2$
۱۶۵	۲	$y'=\frac{-a-1}{(x-1)^2}$, $\begin{cases} x=0 \\ m=1 \end{cases} \longrightarrow -a-1=1 \longrightarrow a=-2$
۱۶۶	۳	$y=0 \longrightarrow tgx=-1$ $y'=1+tg^2x=2=tg\alpha \longrightarrow \alpha=Arctg2$ $(tgx=-1)$
۱۶۷	۱	(۱) نقطه $M\left\vert\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ 2\end{matrix}\right.$ برخط هادی سهمی قرار دارد $y-2=m(x+\frac{1}{2})$ (۲) $\longrightarrow m^2x^2+(m^2-4)x+\frac{m^2}{4}+2=0$ $(y-2)^2=4x-2$ از $\Delta=0$ نتیجه میشود $m=\pm 1$ یعنی $m'.m''=-1$
۱۶۸	۲	$y'=-\frac{y}{x+2y} \longrightarrow m=-\frac{1}{2}$ $y-1=-\frac{1}{2}x \longrightarrow x+2y=2$
۱۶۹	۲	$y'=\frac{-y^3}{3xy^2-2y}$, $m=\frac{-8}{12-4}=-1$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۱۷۰	۳	$S_{(AOB)}=x_B\cdot y_B=27x-x^3$ $S'_x=27-3x^2=0 \longrightarrow x=3 \longrightarrow S_{Max}=54$
۱۷۱	۲	$y'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $y'(0) \longrightarrow x\to 0 \longrightarrow m\to\infty$
۱۷۲	۴	$y'=\frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}=1 \longrightarrow x=-\frac{8}{9}$
۱۷۳	۱	$y'=\cos x-x\sin x,\ y'(0) \longrightarrow m=1$ ضریب زاویه نیمساز ربع اول
۱۷۴	۳	$y=1 \longrightarrow x=0$ $y'=-\frac{y^3}{1-3xy^2} \longrightarrow m=-\frac{1}{y'}=1$
۱۷۵	۴	$x=\frac{4x-2}{x^2+1} \longrightarrow x^3-3x+2=0$ $4p^3+27q^2=-108+108=0$ یک ریشه ساده و یک ریشه مضاعف دارد .
۱۷۶	۳	$y=-4ax-2a^2+1 \longrightarrow y'=-4x-4a=0$ $a=-x \longrightarrow y=4x^2-2x^2+1 \longrightarrow y=2x^2+1$
۱۷۷	۲	$y=\frac{x^2-x}{-x^2+x+1}=\frac{1-1+x-x^2}{x^2-x-1}=\frac{-1}{x^2-x-1}-1$
۱۷۸	۳	مطالب درس جبر $y_{min}=-1=\frac{a}{2x+2} \longrightarrow -1=\frac{a}{-8+2}$ $a=6$

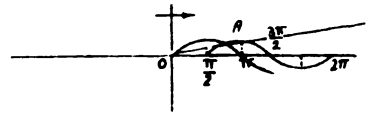
شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۱۷۹	۳	$y'=3x^2-2(m+2)x+3>0 \qquad \Delta'=m^2+4m-5\leqslant 0$ $(m+5)(m-1)\leqslant 0 \qquad -5\leqslant m\leqslant 1$
۱۸۰	۴	$2mx^2-2x=mx-1 \longrightarrow 2mx^2-x(m+2)+1=0$ $\Delta=(m+2)^2-8m=(m-2)^2=0 \longrightarrow m=2$
۱۸۱	۴	باید نقطه M خارج از منحنی (هذلولی) باشد " نقطه $N\left\|\begin{matrix}۲\\۲\end{matrix}\right.$ $۲\times۲=۴>۱$ در داخل منحنی است ونقطه‌هائی که حاصلضرب دومختص آنها برابر ۱ باشدروی‌منحنی‌بنابراین‌نقطه‌هائی که‌حاصلضرب‌دومختص آنها کمتراز ۱است‌خارج‌منحنی‌واقع‌اند .
۱۸۲	۲	$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0$ مشتق نسبت‌به α $(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2+(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2=4$ $x^2+y^2=4$
۱۸۳	۴	$y=mx-1=x^2-x+1 \longrightarrow x^2-x(m+1)+2=0$ $\Delta=(m+1)^2-8=m^2+2m-7=0 \longrightarrow m_1+m_2=-2$
۱۸۴	۳	نقطه $A\left\|\begin{matrix}-۲\\۱\end{matrix}\right.$ مرکز دایره است $(x+2)^2+(y-1)^2=15$
۱۸۵	۱	$m=-4,\ y'=x^4-5x^2 \longrightarrow x^4-5x^2+4=0$ $(x^2-1)(x^2-4)=0 \qquad x=\pm1,\pm2$
۱۸۶	۳	$\sin x=x+\sin x \longrightarrow x=0$



شماره شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		$y'_1=\cos x \longrightarrow m=1$ $y'_2=1+\cos x \longrightarrow m'=2$ $tg\alpha=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}<tg\frac{\pi}{6}$
۱۸۷	۲	$y'=3x^2-3=0 \quad x=\pm 1 \longrightarrow x_{min}=1$ $y_{min}=-1$
۱۸۸	۱	$y'=\frac{-C}{(x+1)^2}=\frac{3+2}{0-5}=-1 \longrightarrow C=(x+1)^2$ معادلهٔ خط AB $\longrightarrow y=3-x$ $\frac{C}{x+1}=3-x \longrightarrow x^2-2x+c-3=0$ $\Delta'=1-c+3=0 \longrightarrow c=4$
۱۸۹	۳	$g'(x)=-10f'(-10x)$ $g'(0)=a=-10f'(0) \longrightarrow f'(0)=-\frac{a}{10}$
۱۹۰	۲	$y'_x=\frac{y'_\alpha}{x'_\alpha}=\frac{3\cos\alpha}{3\sin\alpha}=\cot g\alpha$
۱۹۱	۲	$y'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$ $m=\pi\cos\pi=-\pi$ $x^2+2x+2=2 \longrightarrow x=0,-2 \qquad A\left\vert\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. \qquad B\left\vert\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}\right.$ 
۱۹۲	۲	$OA=BA=2$ $AOB=45$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۱۹۳	۴	$\Delta=9-20=-11<0$
۱۹۴	۴	$y=4\sin^2 x-5<0$
۱۹۵	۳	x به y و y به x تبدیل شده است.
۱۹۶	۱	(۱) $(x-4)^2+y^2=8$ فاصله مبداء مختصات از مرکز دایره ۴ است مکان هندسی نقطه‌هائی که از آنها دو مماس عمود بر هم بر دایره (R و O) رسم شود دایره‌ای است بر مرکز و شعاع $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2}=2\sqrt{2}\sqrt{2}=4$: مطالب درسی یا: (۲) $x^2+8=8x-y^2,\ y=mx \longrightarrow x^2(1+m^2)-8x+8=0$ $\Delta'=16-8(1+m^2)=-8m^2+8=8$ $m'm''=-1 \quad \alpha=\frac{\pi}{2}$
۱۹۷	۲	
۱۹۸	۴	$x^4+1=x^2+2 \longrightarrow x^4-x^2-1=0 \longrightarrow \frac{c}{a}=-1<0$
۱۹۹	۲	$2x^2-3x-m=0\ ,\ m_1=\frac{m}{x'}\ ,m_2=\frac{m}{x''}$ $\frac{m}{x'}\cdot\frac{m}{x''}=\frac{m^2}{x'x''}=\frac{m^2}{\frac{m}{-2}}=-1 \longrightarrow m=\frac{1}{2}$
۲۰۰	۱	$4P^3+27q^2=4+27a^2>0$ یا (۲) $y'=3x^2+1>0$ تابع همواره صعودی منحنی فقط در یک نقطه محور x ها را قطع میکند.
۲۰۱	۲	$\sin(x-\frac{\pi}{2})=\sin x \longrightarrow x=\frac{3\pi}{4} \qquad A\left\vert\begin{matrix}\frac{3\pi}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right.$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست



باتوجه به شکل دو نقطه تقاطع وجود دارد

---

۲۰۲ ۳ هریک از جمله‌های x^4 , $10x^2$, $+6$ مثبت بوده‌ومجموعشـــان مخالف صفر است .

---

۲۰۳ ۲ (۱) $y=x(9x^8+7x^6+5x^4+1)$, $y=0 \longrightarrow x=0$

داخل پرانتز مجموع چندمقدارمثبت‌است‌وفقط $x=0$ جواب‌است .

یا

(۲) $y'=81x^8+49x^6+25x^4+1>0$

تابع همواره صعودی است و در یک نقطه با محور x ها متقاطع است .

---

۲۰۴ ۴ چون منحنی تابع بین $y=0$ و $y=1$ محصور میباشدبایدمجانب قائم‌نداشته باشد و درنتیجه باید مخرج‌تابع یعنی $g(x)$ ریشه‌نداشته باشد .

---

۲۰۵ ۲ $-3x+3y=0 \longrightarrow x=y \longrightarrow 2x^2-3x=0 \quad x=0,\frac{3}{2}$

$y=0, \quad \frac{3}{2}$ وتر مشترک $=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

---

۲۰۶ ۴ $1-\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{4}-1 \longrightarrow x=\pm 2 \quad y=0 \quad A\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right.$

$y'_1=\frac{-x}{2} \longrightarrow m_1=\pm 1 , y'_2=\frac{x}{2} \longrightarrow m_2=\pm 1$

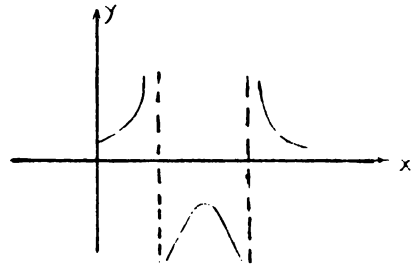
$m_1m_2=-1 \longrightarrow A= \quad B=90$

و AB نیمساز A , B است .

---

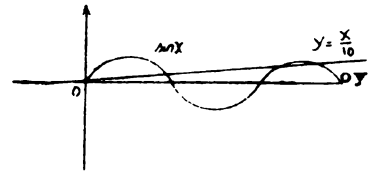
۲۰۷ ۳ $x=0 \longrightarrow y=a$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست



---

۲۰۸ ۳ باتوجه به تقارن منحنی نسبت به مبدا مختصات ۳ نقطه تقاطع درطرف راست oy و سه نقطه قرینه آن درطرف چپ oy و یک نقطه تقاطع مبداء مختصات



---

۲۰۹ ۲ (۱)

$$y=\frac{mx+1}{2mx-m} \qquad y=\frac{-m^2-2m}{(2mx-m)^2} \qquad y'=0-m(m+2)=0$$

فقط $m=-2$

$a'=2m\neq 0$

یا

$$y=\frac{-2x+1}{-4x+2}=\frac{1}{2}$$

(۲)

$$2y=\frac{2mx+2-m+m}{2mx-m}=1+\frac{2+m}{2mx-m}$$

$$m=-2 \longrightarrow 2y-1=0$$

---

۲۱۰ ۴

$$x^2y+my-x+m=0 \longrightarrow x^2y-x+m(y+1)=0$$

$y=-1$

---

۲۱۱ ۳

$x=0,\ y=-2 \qquad C\left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right.$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		باید به‌ازاء جمیع مقدارهای m برنقطهٔ ثابتی‌که همان مرکزدایره است بگذرد. $OC=2$

---

۲۱۲ ۳ مختصات نقطه M در خط D صدق‌میکند $a.a+b.b=2$

$m_D=-\frac{a}{b}$ $y'=-\frac{x}{y} \longrightarrow m=-\frac{a}{b}$

ضریب زاویه‌خط D مشتق تابع به‌ازاء طول و عرض نقطه M است.

---

۲۱۳ ۱ $y=x(x-1)^2(x+1)^3$

$x=1$ ریشه‌مکرر از مرتبه زوج میباشد و کمترین مقدار را دارد.

می‌نیمم است. " مطالب درس جبر"

---

۲۱۴ ۲ $\frac{3(x+1)}{5x-3}=\frac{2x+1}{2x-1} \longrightarrow x^2-x=0 \longrightarrow$ $x=0,1$ $y=-1,3$ $y=4x-1$ (AB)

---

۲۱۵ ۳ $a^2+b^2<c^2$ صورت کسر ریشه ندارد زیرا

$1+9<16$

و مقدار آن همواره منفی است

عبارت مخرج $=2-\frac{3}{2}\sin 2x>0$

درنتیجه $y<0$ است و منحنی زیر محور x ها قرار دارد

---

۲۱۶ ۲ $y=\frac{1}{3(\sin x+1)(\sin x-\frac{1}{3})}$

$\sin x+1$ همواره‌مثبت و $\sin x-\frac{1}{3}$ مثبت یا منفی است‌پس

منحنی در دو طرف محور xها واقع است.

---

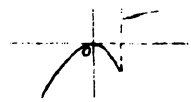
۲۱۷ ۴ $c-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant y\leqslant c+\sqrt{a^2+b^2} \longrightarrow -2-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant -2+\sqrt{3}$

$y_{Max}<0$

چون تابع پیوسته است‌منحنی‌همواره درزیر محور x ها قراردارد.

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۲۱۸	۱	$y_1=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin 2x}$ $y_2=\frac{2}{\sin 2x}+1 \longrightarrow y_2=y_1+1$
۲۱۹	۱	$y=0 \longrightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \longrightarrow tg\alpha . tg\beta=1$ $x.\frac{x}{3}=1 \longrightarrow x=\pm\sqrt{3}$ (۱) اما باتوجه به مطالب مربوط به آرکها فقط $x=\sqrt{3}$ قابل‌قبول‌است. $y'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x^2}{9}}>0$ (۲) تابع همواره‌صعودی‌است‌ومحور x ها را فقط دریک‌نقطه قطع میکند .
۲۲۰	۲	$x=0$ و $y=0$ درهردو تابع صدق‌میکندپس جواب‌درست‌یکی ازجوابهای ۱ یا ۲ است ولی (π و ۱-) در تابعها صدق نمیکند پس ۲ جواب است .
۲۲۱	۲	$y=\frac{(x-1)^2+4}{x^2+4}>0$ همواره مثبت است
۲۲۲	۱	منحنی از مبداء مختصات میگذرد و نسبت به محور y ها قرینه است پس نمودار داده شده نمایش $y=x\sin x$ است .
۲۲۳	۳	منحنی تابع (۱) یک نقطه‌برخورد بامحور x هادارد .منحنی تابع (۲) سه‌نقطه برخورد دارد .منحنی‌تابع (۳)دریک نقطه به طول‌منفی‌بامحور ها متقاطع است و در مبداء مختصات ریشه مضاعف دارد . $x^3+x^2=x^2(x+1)=0 \qquad x=0 \quad , \quad x=-1$
۲۲۴	۴	تابع به‌ازاء $x=1$ برابر صفر است‌وفقط درشکل ۴ دیده میشود .
۲۲۵	۲	$Arctgx=\alpha \quad , \quad Arctgy=\beta$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		$\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha \longrightarrow tg\beta=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha} \longrightarrow y=\frac{1-x}{1+x}$
۲۲۶	۲	$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0$ بالای محور xها قرار دارد
۲۲۷	۳	$x>0,\ (y-1)^2=x$
۲۲۸	۴	چون منحنی با محور yها متقاطع است (۱و۰) شماره ۳ یا شماره ۴ جواب است درشماره (۴) بهازاء $x=1$ داریم $y=0$ پس جواب شماره (۴) میباشد
۲۲۹	۴	$(x-y)(x+y)-2(x-y)=0$ $\quad x^2-y^2-2x+2y=0$ $(x-y)(x+y-2)=0$ $\quad \begin{cases} y=x \\ y=-x+2 \end{cases}$
۲۳۰	۴	نقطه $\left\| \begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix} \right.$ فقط در $y=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2-1}}$ صدق میکند.
۲۳۱	۴	یک نقطه است $A\left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$ $\quad (x-1)^2+y^2=0$
۲۳۲	۴	$y=x-1-\|x+1\|$ "مطالب درسی مربوط به مقطعهای مخروطی"
۲۳۳	۴	$x=0,\ y^2-4=0 \longrightarrow A\left\| \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \right.$ $\quad B\left\| \begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix} \right.$
۲۳۴	۴	$\sqrt{y}=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \longrightarrow x+1\geqslant 0 \longrightarrow x\geqslant -1$ $1-x\geqslant 0 \longrightarrow x\leqslant 1$ جواب مشترک $\begin{cases} 1\geqslant x\geqslant -1 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ نیمی از بیضی $(y-2)^2+4x^2=4$
۲۳۵	۴	$x^2-1=0 \longrightarrow x=\pm 1,\ 4-y^2=0 \longrightarrow y=\pm 2$

شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		$(1,2),(-1,-2),(1,-2),(-1,2)$
۲۳۶	۳	$x-2\geqslant 0 \longrightarrow x\geqslant 2 \quad , \quad 2-x\geqslant 0 \longrightarrow x\leqslant 2$ $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$
۲۳۷	۳	$y=1-x+x+2+3=6 \qquad -2\leqslant x\leqslant 1$
۲۳۸	۱	مطالب درس مربوط به: $\lvert x-a\rvert+\lvert y-b\rvert=k$
۲۳۹	۱	$x^2+x(3-2y)+k-4y=0$ باید عبارت $\Delta=(3-2y)^2-4(k-4y)$ ویا $\Delta=(2y+1)^2+8-4k$ مربع کامل باشد (مطالب درس جبر) درنتیجه $8-4k=0 \longrightarrow k=2$
۲۴۰	۴	تابع داده شده همواره مثبت است که باشکل (۴) مطابقت دارد .
۲۴۱	۳	$2>x>-2 \longrightarrow y=1$ $\begin{cases} x<-2 \\ x>2 \end{cases} \longrightarrow y=-1$ باشکل ۳ مطابقت دارد .
۲۴۲	۳	نمودار $f(x)=x$ با شرط $x>2$ یک نیم خط است . همچنین $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ باشرط $x<2$ یک قسمتی از منحنی است زیرا از یکطرف محدود است . 
۲۴۳	۱	مطالب درس مربوط به $x=\lvert x-a\rvert+\lvert x-b\rvert$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۲۴۴	۴	"جلو رادیکال فقط علامت مثبت است"

$$y^2=x^2-4 \longrightarrow x^2-y^2=4$$

---

۲۴۵ ۴ زیرا $x=0$, $x=2$ جوابهای $y=0$ است.

---

۲۴۶ ۳ $f(x)=2x+5$ به ازاء $x<-1$ یک‌نیم‌خط است.
$f(x)=\frac{1}{x}$ به‌ازاء $x>-1$ یک‌شاخه‌واقع در ناحیه اول از منحنی تابع $y=\frac{1}{x}$ و قسمتی از شاخه‌دوم به‌ازاء مقدارهای $x>-1$

---

۲۴۷ ۲

$$-\frac{b}{a}=\frac{2+t^2}{1+t^2}=1+\frac{1}{1+t^2}$$

باید $1+t^2$ کمترین مقدار یعنی $t=0$ باشد.

---

۲۴۸ ۱ باتوجه به علامت مشتق

$$y'=2x-\frac{16}{x^2}=0 \qquad x=2 \longrightarrow y=12$$

---

۲۴۹ ۳

$$y'=2(x-1)+2(x-2)+\ldots\ldots+2(x-2^n)$$
$$y'=2(x+1)x-2(2^{n+1}-1)=0$$
$$x=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

---

۲۵۰ ۲ $x=0$ طول نقطه می‌نیمم است‌چون‌دراین نقطه مقدار تابع می‌نیمم است.

---

۲۵۱ ۱ به‌ازای $x=0$ مشتق ندارد $y'=-\frac{x}{|x|}$
مطالب درس مشتق

---

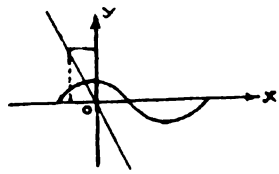
۲۵۲ ۳ چون $x=\frac{1}{2}$ ریشه‌مکرر مرتبه فرد میباشدطول نقطه عطف است
(مطالب درس جبر)

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۲۵۳	۲	چون ۱= ریشه مکرر مرتبه زوج تابع می‌باشد و ۶ کمترین مقدار رادارد طول نقطه می‌نیمم است .
۲۵۴	۲	تابع داده شده یعنی $y\leqslant 0$ است پس دارای ماکزیممی برابر صفر میباشد .
۲۵۵	۴	مطالب درس جبر $y_{Max}\cdot y_{Min}=\frac{4ac-b^2}{4a'c'-b'^2}=\frac{8-0}{4-1}=\frac{8}{3}$
۲۵۶	۱	حداکثر مقدار y برابر صفر است "باتوجه‌به‌صورت کسر" $y=\frac{-(x-\frac{1}{2})^2}{4x^2+1}$
۲۵۷	۱	باید طول ماکزیمم یا می‌نیمم ریشه مضاعف $y=0$ باشد" مطالب‌درس جبر" $\Delta=m^2-4=0 \qquad m=2,-2$ ۲+ قابل قبول نیست چون صورت ومخرج تابع ریشه مشترک‌پیدامیکند. پس $m=-2 \longrightarrow x=1$
۲۵۸	۳	زیرا اگر y به y- تبدیل شود تابع تغییر $(-y)^2=y^2=x^3$ نمی‌کند
۲۵۹	۲	خط $y=-1$ یکی از قطرهای دایره $x^2+y^2+2y-4=0$ است . $x^2+(y+1)^2=5 \qquad c\left\vert\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$
۲۶۰	۳	اگر x به y و y به x تبدیل شودتابع تغییرنمی‌کند ،پس نیمساز ربع اول محور تقارن آن است .
۲۶۱	۱	اگر x به x- تبدیل شودتابع تغییر نمی‌کند ،پس خط $x=0$ محور تقارن آن است .

شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۲۶۲	۴	می‌توان نوشت : $1+x=2(y-1)^2$ نمودار آن یک‌سهمی افقی است که $y=1$ محورتقارن آن است .
۲۶۳	۲	$x^2=y+6+3x \longrightarrow y=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{33}{4}$ $x=\frac{3}{2}$ طول نقطه راس سهمی است‌که‌محور تقارن از همین نقطه می‌گذرد .
۲۶۴	۲	"مطالب درس جبر" تقارن $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-7 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x=-4 \\ y=3 \end{matrix}$
۲۶۵	۳	۱) نقطه عطف مرکز تقارن ۲) محل برخوردمجانب‌ها مرکز تقارن ۴) x به x- و y به y- مبداء مختصات مرکز تقارن" مطالب درس جبر در تقارن "
۲۶۶	۳	محورهای تقارن دایره $x^2+y^2=2x-y$ از همه بیشتر است "باید توجه داشت که پاسخ (۴) نیمدایره‌است و فقط یک محور تقارن دارد .
۲۶۷	۲	$x^2+(y-1)^2-9=0$ $x=0$ محور تقارن است
۲۶۸	۳	$2xy=x-3 \longrightarrow y=\frac{x-3}{2x} \longrightarrow \left\| \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$ $f'_x=2y-1=0 \longrightarrow y=\frac{1}{2}$ (۱) $f'_y=2x=0 \longrightarrow x=0$ (۲)
۲۶۹	۲	منحنی تابع $\frac{1}{\|x\|}$ همواره بالای محور x ها و قرینه آن نسبت‌به مبداء مختصات منحنی $\frac{-1}{\|x\|}$ میباشد که زیرمحور xهاقراردارد .

شماره شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۲۷۰	۴	$y=\frac{2x^2-5x+4}{2x^2+4}=1-\frac{5x}{2x^2+4}$ $y-1=\frac{-5x}{2x^2+4}$
۲۷۱	۳	$C\left\|\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$ وسط AB , $m_{AB}=\frac{3-1}{4-2}=1 \longrightarrow m=-1$
۲۷۲	۳	معادله عمودمنصف $x+y=5$ $y-3=Y \longrightarrow Y^2=(x-1)^2(x+1)$ نسبت به y ازدرجه زوج میباشد محور x های حدید یعنی $y=3$ محور تقارن است .
۲۷۳	۲	(۱) چون تساوی $p'(p-p')=2(q-q')$ برقرار است . " مطالب درس جبر درتقارن " $\omega\left\|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ مرکزتقارن‌منحنی است . (۲) می‌نویسیم $y=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}=1+\frac{2x}{x^2+1}$ یا $y-1=Y \longrightarrow Y=\frac{2x}{x^2+1}$ اکنون اگر x به $-x$ و y به $-y$ تبدیل شود تابع تغییر نمی‌کند پس مبداء مختصات جدید یعنی $\omega\left\|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن است .
۲۷۴	۴	نقطه عطف مرکز تقارن است
۲۷۵	۳	تابع $x^2+y^2=2x-y$ یک دایره را نشان میدهد و محورهـای تقارن بیشمار دارد .
۲۷۶		در تابع $y=1+\sqrt{1-x^2}$ با تبدیل x به $-x$ تابع تغییر نمی‌کند محور y ها محور تقارن آن است .

شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۲۷۷	۴	در تابع $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}$ اگر x به x- و y به y- تبدیل شود تابع تغییر نمی‌کند.
۲۷۸	۳	$x=(y-x^2)$ که $y=x$ تنها محور تقارن آن است. ۱) دو محور تقارن عمود بر هم ۲) دو محور تقارن "هذلولی" $y+x=2xy+x \longrightarrow (y-x)^2=x \longrightarrow y=x\pm\sqrt{x}$ سهمی "مطالب درس جبر در محور تقارن" ۴) یک محور تقارن قائم
۲۷۹	۳	$y-2=\sqrt{(x-2)^2-4} \longrightarrow y-2=\sqrt{x^2-4}$ x به x- و y تغییر نمی‌کند خط $x=2$ محور تقارن است.
۲۸۰	۳	در تابع $y=(x-1)^3+2x$ ، $x=1$ طول نقطه‌عطف‌است و طول مرکز تقارن میباشد.
۲۸۱	۲	زیرا: $2-y=(-x)^3-x(-x)^2+1$ $-2+y=x^3+3x^2-1 \longrightarrow y=x^3+3x^2+1$
۲۸۲	۳	نقطه (۱و۱-) مرکز تقارن منحنی تابع $y=\frac{x-1}{x+1}$ میباشد که میتوان نوشت $y=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$
۲۸۳	۴	با تبدیل x به x- تابع تغییر نمی‌کند $y=\mathrm{Cos}(-2x)+\mathrm{Log}\mathrm{Sin}^2(-x)=\mathrm{Cos}2x+\mathrm{Log}(-\mathrm{Sin}x)^2=\mathrm{Cos}2x+\mathrm{Log}\mathrm{Sin}^2x$
۲۸۴	۲	مطالب درس جبر "تقارن درمنحنی‌های مثلثاتی"
۲۸۵	۲	معادلهٔ محور تقارن $y=\mathrm{Cos}x \longrightarrow x=k\pi$ $x=\frac{3x}{4}-\frac{\pi}{3} \longrightarrow \frac{3x}{4}-\frac{\pi}{3}=k\pi \longrightarrow x=\frac{4k\pi}{3}+\frac{4\pi}{9}$

شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۲۸۶	۴	$\cos(x-\pi)=-\cos x \longrightarrow 1-\cos(x-\pi)=1+\cos x\geqslant 0$ $\lvert 1-\cos(x-\pi)\rvert = 1-\cos(x-\pi)$
۲۸۷	۳	مطالب درس جبر " مرکز تقارن مکان هندسی " $\lim_{x\to\infty}[g(x)+x-2]-(x+1)=0$
۲۸۸	۳	$\lim_{x\to\infty}[g(x)-3]=0 \longrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x)=3$
۲۸۹	۲	$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}+\sqrt{\frac{1-9}{x^2}}\right)=2$
۲۹۰	۴	$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=\sqrt{2}$
۲۹۱	۴	مطالب درسی درمورد مقطعهای مخروطی $y=\alpha x+\beta\pm\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)$ $y=-x\pm 2x \longrightarrow y=x, y=-3x$
۲۹۲	۱	$y^2-4x^2=0 \longrightarrow y=\pm 2x$ $y=2x+n \longrightarrow (2x+n)^2-4x^2+16x-8(2x+n)=4$ $4nx+n^2-8n-4=0 \longrightarrow n=0$ $y=2x$ مطالب درسی جبر
۲۹۳	۱	$y=\alpha x+\beta\pm\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)$ $y=2x\pm\left(x+\frac{1}{2}\right) \longrightarrow y=x+\frac{1}{2}, y=3x+\frac{1}{2}$
۲۹۴	۲	$x\to\pm\infty \longrightarrow y=0$ 

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		$3x+\cos x=0 \longrightarrow \begin{cases} y_1=-3x \\ y_2=\cos x \end{cases}$ $y \to \pm\infty$
۲۹۵	۳	$x=2 \longrightarrow y \to \infty \ , x \to \pm\infty \longrightarrow y=\pm 1$
۲۹۶	۳	$x \leqslant -2 \ , \ x \geqslant +2 \ , \ x \to \pm\infty \quad y=\pm 1$
۲۹۷	۴	$x=\pm 1 \longrightarrow y \to \infty$
۲۹۸	۲	$y=\alpha x+\beta \pm \sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)=x\pm(x+1)$ $y=2x+1 \quad y=-1$
۲۹۹	۳	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}=0 \longrightarrow y=0$
۳۰۰	۳	$x=1 \longrightarrow y \to \infty$ $x \to \pm\infty \longrightarrow y=\pm 1$
۳۰۱	۳	زیرا روش (۱) $y^2-3xy+2x^2=0 \longrightarrow (y-2x)(y-x)=0$ "امتداد مجانب‌ها" $y=2x, \ y=x$ وبامقایسه با جوابهای داده شده جواب ۳ درست است. روش (۲) $y=\frac{1}{2}(3x\pm\sqrt{x^2+4})$ معادله خط مجانب $y=\frac{3}{2}x\pm\frac{1}{2}x \longrightarrow y=2x, \ y=x$ " مطالب درس جبر در مجانب "
۳۰۲	۲	باید $x^2+mx+1=0$ ریشه مضاعف‌داشته باشد پس باید $\Delta=m^2-4=0 \longrightarrow m=\pm 2$
۳۰۳	۴	$x \to \pm\infty$ $y=ax+1\pm x \longrightarrow a\pm 1=0 \longrightarrow a=\pm 1$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۰۴	۴	$y=x\pm(x+\frac{1}{2}) \longrightarrow y=2x+\frac{1}{2}\ ,\ y=-\frac{1}{2}$
۳۰۵	۴	مطالب درس جبر مشابه یافتن مجانب مقطعهای مخروطی عمل می‌کنیم . $xy^2-x^3=0 \longrightarrow x(y-x)(y+x)=0$ $x=0 \quad y=x \quad , \quad y=-x$
۳۰۶	۱	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x^2})=1$ $b=\lim\limits_{x\to\infty}=(y-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$
۳۰۷	۳	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0 \longrightarrow y=2x$ $x=0 \longrightarrow y \longrightarrow \infty$
۳۰۸	۲	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{Arccos}\frac{1-x^2}{1+x^2} \longrightarrow \operatorname{Arccos}(-1)=\pi$
۳۰۹	۱	$x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=(t-2)^2-2(t^2-1)=$ $-t^2-4t+6=10-(t+2)^2 \longrightarrow t=-2$
۳۱۰	۱	$y=a\sin x+b\cos x \longrightarrow a^2+b^2\geqslant y^2$ $-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$
۳۱۱	۲	$a^2+b^2=8$ $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}[(a+b)^2-(a^2+b^2)]=\frac{1}{2}[(a+b)^2-8] \longrightarrow$ مطالب درس جبر ماکزیمم و می‌نیمم بعضی از عبارتها $a=b=2$
۳۱۲	۴	$x^2+y^2=x^2+\frac{(c-ax)^2}{b^2}=\frac{x^2(a^2+b^2)-2acx+c^2}{b^2}$

شماره شماره تست جواب	راهنمای تعیین جواب درست
	می‌نیمم عبارت $= \frac{4(a^2+b^2)c^2-4a^2c^2}{4b^2(a^2+b^2)} = \frac{4b^2c^2}{4b^2(a^2+b^2)} = \frac{c^2}{a^2+b^2}$
	$ab=4 \longrightarrow a=b=2$

---

۳۱۳ ۲

$ab=4 \longrightarrow a=b=2$

محیط $=2(a+b)=8$

(مطالب درس جبر)

"ماکزیمم و می‌نیمم عبارتها"

---

۳۱۴ ۱ عبارت $\frac{x^2}{1+x^4}$ وقتی ماکزیمم است که $\frac{1+x^4}{x^2}$ می‌نیمم باشد

$$\frac{1+x^4}{x^2} = \frac{1}{x^2}+x^2 \longrightarrow \frac{1}{x^2} \times x^2 = 1 = \underline{\underline{ct}}$$

وقتی می‌نیمم است که $x^2 = \frac{1}{x^2} \longrightarrow x=\pm 1$

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

---

۳۱۵ ۲

$$-\frac{b}{a} = m^2-2m = (m-1)^2-1$$

می‌نیمم وقتی است که $m-1=0$ باشد درنتیجه: $-\frac{b}{a}=-1$

---

۳۱۶ ۲

$$x^4+y^4-2x^2+4y^2+7 = (x^2-1)^2+y^4+4y^2+6$$

وقتی می‌نیمم است که: $x^2-1=0 \quad , \quad y^2=0$

---

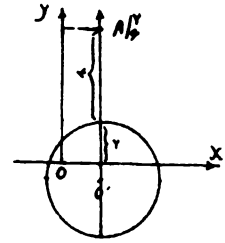
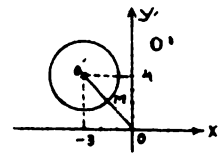
۳۱۷ ۳ عبارت $y=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ وقتی ماکزیمم است که $\frac{1}{y}=\frac{(x^2+1)^2}{x^2}$ می‌نیمم باشد

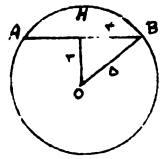
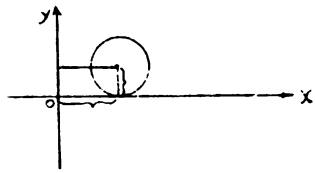
$$\frac{x^2+1}{x} = x+\frac{1}{x} \longrightarrow x \times \frac{1}{x} = 1 = \underline{\underline{ct}}$$

$$x=\frac{1}{x} \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow x=\pm 1$$

$$y_{Mam} = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۱۸	۱	$\frac{-x^2+2x-1}{2x^2+5} = \frac{-(x-1)^2}{2x^2+5} \leqslant 0$
۳۱۹	۲	$y^2=2-x^2 \longrightarrow x^4+(2-x^2)^2=2(x^4-2x^2+1)+2=$ $2(x^2-1)^2+2 \longrightarrow$ می‌نیمم عبارت $= 2$
۳۲۰	۳	$y=3^{1-\cos^2 x}+3^{\cos^2 x}=\frac{3}{3^{\cos^2 x}}+3^{\cos^2 x}$ حاصلضرب دوعامل مثبت $3^{\cos^2 x}, \frac{3}{3^{\cos^2 x}}$ مقداری‌است ثابت‌ولذا . $\frac{3}{3^{\cos^2 x}}=3^{\cos^2 x} \longrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}$ $y_{Max}=2\sqrt{3}$
۳۲۱	۱	$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} = ct \qquad \sqrt{x}=\sqrt{y}=\frac{\sqrt{a}}{2}$ $x=y=\frac{a}{4} \qquad xy=\frac{a^2}{16}$
۳۲۲	۳	$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{(x+1)^2+3}$ $x+1=0 \longrightarrow d_{min}=\sqrt{3}$
۳۲۳	۴	$M\left\vert\begin{matrix}\alpha\\ \alpha^2\end{matrix}\right. \longrightarrow d=\frac{\lvert\alpha-\alpha^2-1\rvert}{\sqrt{2}}=\frac{\lvert\alpha^2-\alpha+1\rvert}{\sqrt{2}}$ $=\frac{(\alpha-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{\sqrt{2}} \longrightarrow d_{min}=\frac{3}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$
۳۲۴	۳	$(x+1)^2+(y-1)^2=2 \qquad \omega\left\vert\begin{matrix}-1\\ 1\end{matrix}\right.$ مبداء مختصات روی دایره واقع است $d=2(O\omega)=2\sqrt{(-1)^2+1^2}=2\sqrt{2}$

شماره شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۲۵	۳	$O'\left\vert\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right.$, $R=3$ $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ $MA=O'A-O'M=7-3=4$ 
۳۲۶	۲	$O'\left\vert\begin{matrix}-3\\4\end{matrix}\right.$ $R=2$  $OO'=5$ $O'M=OO'-MO'=5-2=3$
۳۲۷	۱	$-3\leqslant x\leqslant 3$ $-4\leqslant y\leqslant 4$ $d=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$
۳۲۸	۳	$x=t^2$, $y=1+t^2 \longrightarrow y=x+1$ " $y\geqslant 1$, $x\geqslant 0$ "
۳۲۹	۲	$x^2=\mathrm{Cotg}^2\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}$, $y^2=\dfrac{1}{\mathrm{Cos}^2\alpha}=1+\mathrm{tg}^2\alpha=1+\dfrac{1}{x^2}$ $y^2=\dfrac{x^2+1}{x^2}$
۳۳۰	۱	$4x^2+y^2-4xy=1 \longrightarrow (2x-y)^2=1$ $2x-y=\pm 1$
۳۳۱	۲	$\omega\left\vert\begin{matrix}x=\dfrac{4}{a}\\y=\dfrac{1}{a}\end{matrix}\right. \longrightarrow y=\dfrac{x}{4}$

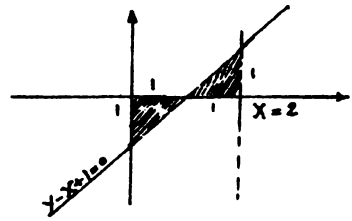
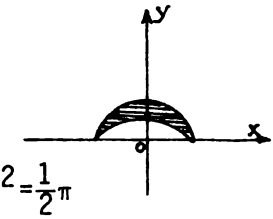
شماره شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۳۲	۲	$r^2=OH^2=25-16=9$ $r=3 \longrightarrow x^2+y^2=9$ 
۳۳۳	۲	قسمتی ازخط $y=2$ مکان هندسی است که برای آن $0\leqslant x\leqslant 2$
۳۳۴	۲	$y=1-\text{Sin}t \longrightarrow \text{Sin}t=1-y$ $x=\frac{1+\text{Sin}t}{\text{Sin}t}=\frac{2-y}{1-y}$ $\quad y=\frac{x-2}{x-1}$
۳۳۵	۳	$x-1=2\text{Sin}\frac{2t}{2}=1-\text{Cos}t \rightarrow x-2=-\text{Cos}t \rightarrow 1\leqslant x\leqslant 3$ $y-1=-\text{Sin}t \qquad (x-2)^2+(y-1)^2=1$  $0\leqslant y\leqslant 1$
۳۳۶	۲	وقتی $t\varepsilon R$ است $x\geqslant 2$ و $y\varepsilon R$ است و داریم: $\begin{cases} x+y=2\times 2^t \\ x-y=2\times 2^{-t} \end{cases} \longrightarrow x^2-y^2=4$
۳۳۷	۳	$1-x^2<2y^2 \longrightarrow x^2+2y^2>1$ برای تعیین مجموعه نقاطی که مختصات آنهادراین نامعادله صدق میکند نخست بیضی $x^2+2y^2=1$ رارسم می‌کنیم و مختصات یک نقطهٔ درون بیضی‌مانند (۰ و ۰) را در ۳ + قرار می‌دهیم می بینیم که حاصل از یک‌کوچکتراست‌پس مجموعهٔ‌نقاط بیرون‌بیضی‌جواب است.
۳۳۸	۴	چون زاویه OHA برابر 90° است مکان قسمتی از دایره به قطر OA

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		خواهد بود که درون دایرهٔ O قرار دارد .
۳۳۹	۴	کمان درخور (یاحاوی) زاویه α مکان کمانی است از دو دایره‌که OA وتر مشترک آنها است . $K(x^2+y^2)-y-Kx=0$
۳۴۰	۴	مطالب درس جبر " دوره تناوب "
۳۴۱	۱	دراین تابع قدر مطلق در دوره تناوب تغییری نمی دهد زیرا . دوقسمت منحنی که بالاو پائین محور x هاقرار دارد قرینه نمی‌باشند .
۳۴۲	۴	مطالب درس جبر " دوره تناوب "
۳۴۳	۱	مطالب درس جبر " دوره تناوب "
۳۴۴	۳	$y=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-1=\frac{(\cos^2 2x-\sin^2 2x)}{\frac{1}{2}\sin 4x}-1=\frac{2\cos 4x}{\sin 4x}-1$ $=2\cot g 4x-1$
۳۴۵	۳	$180x=\pi x^R$, $100x^g=\frac{\pi}{2}x^R$ دوره تناوب $\sin \pi x^R$ برابر ۲ و دوره تناوب $\cos 100x^g$ برابر ۴ میباشد
۳۴۶	۲	دوره تناوب در $\cos x$ برابر 2π میباشد پس دوره تناوب‌تابع نیز 2π خواهد بود .
۳۴۷	۱	$\cos(\sin x)=\cos[\sin(x+\pi)]=\cos[-\sin x]=\cos(\sin x)$
۳۴۸	۴	این تابع که شامل متغیر x میباشد دوره تناوب ندارد (مطالب درس جبر " دوره تناوب ")

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۴۹	۲	$y=\cos(\frac{17\pi}{2}+x)\sin^3 x=$ $\cos(\frac{\pi}{2}+x)\sin^3 x=-\sin^4 x$ چون توان زوج دارد دوره تناوب نصف میشود .
۳۵۰	۲	دوره تناوب $\cos(\frac{3\pi}{4}-2x)$ برابر π میباشد زیرا $\cos(\frac{3\pi}{4}-2x)=\cos\frac{3\pi}{4}\cos 2x+\sin\frac{3\pi}{4}\sin 2x=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2x-\cos 2x)$
۳۵۱	۳	چون دو قسمت‌ازمنحنی که در بالا و پائین محور xها واقع است قرینه هم می‌باشند دوره تناوب نصف میشود .
۳۵۲	۲	$\frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)(2-i)}{4-i^2}=\frac{5-5i}{5}=1-i$
۳۵۳	۱	$(3-4i)(1+2i)=3+2i-8i^2=11+2i$
۳۵۴	۴	$(1-2i)^{-2}=\frac{1}{(1-2i)^2}=\frac{1}{1+4i^2-4i}=-\frac{1}{4i+3}=-\frac{3-4i}{9-16i^2}$ $=\frac{4i-3}{25}$
۳۵۵	۲	$(1-i)^2=1+i^2-2i=-2i$ $\frac{1}{64}(1-i)^{18}=\frac{1}{64}(-2i)^9=-2^3 i^9=-2^3 i=-8i$
۳۵۶	۳	$n\leqslant x<n+1$ $-4<-\sqrt{10}<-\sqrt{10}+1$
۳۵۷	۳	این تابع متناوب است و دوره تناوب آن ۱ میباشد زیرا : $f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x)$

شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		پس کافی است نمودار تابع را وقتی x در فاصلهٔ] ۱و۰] تغییرمیکند رسم کنیم و سپس منحنی حاصل را در امتداد محور x ها به اندازه‌یک واحد انتقال دهیم ولی در فاصلهٔ] ۱و۰] نمودار تابع بانمودارتابع $y=x$ مطبق است .
۳۵۸	۲	۱ با توجه به تابع اولیه $u'.u^m$ که‌به‌صورت $\frac{1}{1+m}u^{m+1}+c$ میباشد باید ضریب و نما عکس یکدیگر باشند و باتوجه به نمای کسری $\frac{1}{5}$ باید نما از ضریب بیشتر باشد . $Y=\frac{5}{6}(2\sqrt{x}+3)^{\frac{6}{5}}+c$ (۲)
۳۵۹	۴	$y=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{2\cos^2x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}tg^2x$ $y=1-\frac{1}{2}(1+tg^2x) \longrightarrow Y=x-\frac{1}{2}tgx+c$
۳۶۰	۳	$f'(x^2)=\frac{1}{\sqrt{x^2}} \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $f(x)=2\sqrt{x}$
۳۶۱	۴	$y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^4}=\frac{1}{2}.\frac{2}{(x+1)^2}.(\frac{x-1}{x+1})^2$ $Y=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}(\frac{x-1}{x+1})^3+c=\frac{1}{6}(\frac{x-1}{x+1})^3+c$
۳۶۲	۳	این منحنی دایره است بنابراین $x^2=1-y^2$
۳۶۳	۲	$[xf(x)]'=xf'(x)+f(x)$ $[xf(x)]'=1$ $xf(x)=x+c \longrightarrow f(x)=1+\frac{c}{x}$
۳۶۴	۳	چون منحنی تابع ازمبداء مختصات میگذرد پس تابع

شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		$(y-2)^2-(x-1)^2=3$
۳۶۵	۱	چون $g(x)$ برابر تابع اولیه $f(x)$ میباشد پس $f(x)$ برابر $g'(x)$ خواهد بود.
۳۶۶	۴	$\int_0^2 (2x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{2\cdot\frac{3}{2}}=[\frac{1}{3}\sqrt{(2x)^3}]_0^2=\frac{8}{3}$
۳۶۷	۱	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x-1)dx=[tgx-x]_0^{\frac{\pi}{4}}$ $=1-\frac{\pi}{4}$
۳۶۸	۲	$y=Cos2x \longrightarrow Y=\frac{1}{2}Sin2x$ $y=0 \longrightarrow x=\frac{\pi}{4} \longrightarrow S_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$
۳۶۹	۲	$y=Cosx(Sinx)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow y=\frac{2}{3}Sinx^{\frac{3}{2}}$ $S_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$
۳۷۰	۲	چون همواره $y>0$ این تابع دوره‌ای با دورهٔ تناوب π است و به ازاء $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ و به ازاء $y=0$ $x=0,\pi,2\pi$ $y=1$ است و فاصله $(\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ دوبرابر $(0,\frac{\pi}{2})$ میباشد وبنابراین $S=2a$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۷۱	۱	$s=s_1+s_2$ $s_1=s_2=\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$ $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 
۳۷۲	۳	$g(x)=x^2-\sqrt{x}=x^2-x^{\frac{1}{2}}$ $\quad x^2=\sqrt{x} \longrightarrow x=0,1$ $G(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $S=\left\|\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right\|=\frac{1}{3}$
۳۷۳	۲	$g(x)=x^2-x^{\frac{2}{3}} \longrightarrow G(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$ $x^6-x^2=0 \quad x^2(x^4-1)=0 \quad x=0,\ x=1$ جواب (۱ـ) قابل قبول نیست . $S=\left\|\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\right\|=\frac{4}{15}$
۳۷۴	۱	$x^2+y^2=1$ $x^2+4y^2=1 \longrightarrow x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ $a=1,\ b=\frac{1}{2}$  مساحت نیمدایره $=\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}\pi$ مساحت نیم بیضی $=\frac{1}{2}\times\frac{ab\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$ $S=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}$

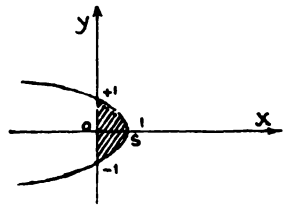
شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۷۵	۳	$g(x)=\pi y^2=\frac{4\pi}{x^2} \longrightarrow G(x)=\frac{-4\pi}{x}$

$$V=\left[-\frac{4\pi}{x}\right]_{-2}^{-1}=4\pi-2\pi=2\pi$$

---

۳۷۶ ۱ (۱) اگر حجم حاصل یا حجم دومخروط به شعاع قاعده OS وارتفاع ۱ مقایسه شود

دومخروط $V=\pi\times 1^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\pi$



باتوجه به آنکه حجم مطلوب ازحجم این دومخروط بیشتر است مقداری نزدیک به π باید باشد. جواب (۱)

(۲) محاسبه $x^2=1-2y^2+y^4 \rightarrow g(y)=\pi x^2=\pi(1+y^4-2y^2)$

$$G(y)=\pi\left(y+\frac{1}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3\right)$$

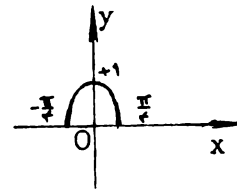
$$x=0 \longrightarrow y=\pm 1$$

$$V=\left[y+\frac{1}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3\right]_{-1}^{1}=\frac{16\pi}{15}$$

---

۳۷۷ ۱ $g(x)=\pi y^2=\pi\cos^2 2x=\frac{\pi}{2}(1+\cos 4x)$

$$G(x)=\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)$$

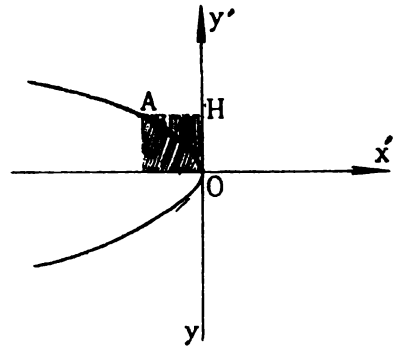


$$V_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{4}$$

شماره شماره تست	جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۷۸	۴	$\pi y^2=\pi b^2-\frac{b^2}{a^2}\pi x^2 \longrightarrow G(x)=\pi b^2 x-\frac{\pi}{3}\times\frac{b^2x^3}{a^2}$ $y=0 \qquad x=\pm a$ $V_1=(\pi b^2 a-\frac{\pi}{3}b^2a)-(-\pi b^2a+\frac{\pi}{3}b^2a)=\frac{4}{3}\pi b^2a$ همچنین $V_2=\frac{4}{3}\pi a^2 b$ درنتیجه $\frac{V_1}{V_2}=\frac{b}{a}$
۳۷۹	۱	$g(x)=\pi y^2=2P\pi x$ $G(x)=P\pi x^2 \longrightarrow V_0^a=P\pi a^2$
۳۸۰	۳	$(x+1)^2+y^2=1 \longrightarrow R=1$ از دوران حول محور x ها یک‌کره پدید میآید $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi$
۳۸۱	۳	$y^2=x^3+x^2 \longrightarrow g(x)=\pi x^3+\pi x^2$ $G(x)=\frac{1}{4}\pi x^4+\frac{1}{3}\pi x^3$ $y=0 \quad \left\vert \begin{matrix} x=0 \\ x=-1 \end{matrix}\right. \longrightarrow V_{-1}^0=0-(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi)=\frac{\pi}{12}$
۳۸۲	۴	$(x+1)^2+y^2=1 \qquad \omega(-1,0)$ خط $y=x+1$ از مرکز دایره‌میگذرد و از دوران‌منحنی حول خط‌کره پدید میآید . $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi$
۳۸۳	۳	$\pi x^2=\pi y$ $G(x)=\frac{\pi}{2}y^2$ $V_0^2=[\frac{\pi}{2}y^2]_0^2=\frac{\pi}{2}.4=2\pi$

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۸۴	۲	حجم حاصل ازدوران سطح (OAH) - حجم استوانه = حجم مطلوب

$\pi x^2 = \pi y^4 \qquad y = \pm 1 \longleftarrow x = -1$



$G(y) = \frac{\pi}{5} y^5$

حاصل از دوران سطح $V_0^1 = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$

---

۳۸۵ ۳

$1 - x \geqslant 0 \longrightarrow x \leqslant 1$

$x - 1 \geqslant 0 \longrightarrow x \geqslant 1$

$\longrightarrow x = 1$

---

۳۸۶ ۴

$1 - x \geqslant 0 \longrightarrow x \leqslant 1$

$x - 1 > 0 \longrightarrow x > 1$

برای x مقداری وجود ندارد

---

۳۸۷ ۳

$fog = \sqrt{(\sqrt{1-x^2})^2 - 1} = \sqrt{1 - x^2 - 1} = \sqrt{-x^2}$

فقط $x = 0$

---

۳۸۸ ۳

$x^2 - 4 \geqslant 0 \longrightarrow x \leqslant -2 \qquad x \geqslant 2$

---

۳۸۹ ۴

یادآوری مقصود از [x] فقط عددهای درستی است که به x بتوان نسبت داد:

$1 \leqslant x < 2 \longrightarrow [x] = 1 \longrightarrow 1 - [x] = 0$

باتوجه به مخرج باید $x \neq 0$ باشد

---

۳۹۰ ۴

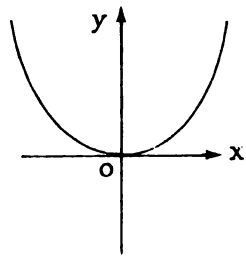
اگر به x عدد درست و مثبت یا صفر نسبت داده شود مخرج برابر با صفر است.

شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
۳۹۱	۳	$x\geqslant 0,\ \ y=x+\sqrt{x} \longrightarrow y\geqslant 0$
۳۹۲	۴	$y=x-\sqrt{x} \longrightarrow y-x=-\sqrt{x} \longrightarrow y^2+x^2-2yx=x \longrightarrow$ $x^2-(2y+1)x+y^2=0 \qquad \Delta=(2y+1)^2-4y^2\geqslant 0 \longrightarrow y\geqslant -\frac{1}{4}$
۳۹۳	۴	$\sqrt{x^2-k}<\lvert x\rvert \qquad k>0$ $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}=\frac{\sqrt{(x-1)^2-1}}{x-1} \qquad -1<y<1$
۳۹۴	۳	$y=\frac{2(x^2+x+1)-2}{x^2+x+1}=2-\frac{2}{x^2+x+1}=2-\frac{2}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$ $-\frac{2}{3}\leqslant y\leqslant 2$
۳۹۵	۳	$\sqrt{x^2-1}\geqslant 0 \longrightarrow x\geqslant 1 \longrightarrow 0<y\leqslant 1$ $y=x-\sqrt{x^2-1} \longrightarrow x\leqslant -1 \longrightarrow y\leqslant -1$
۳۹۶	۳	k عدد درست فرض می‌شود : $x=k \longrightarrow f(x)=k-k=0$ $x=k+\alpha,\ 0<\alpha<1 \longrightarrow 0\leqslant f(x)\leqslant \alpha \longrightarrow 0\leqslant f(x)<1$ $f(x)=k+\alpha-[k+\alpha]=k+\alpha-k=\alpha$
۳۹۷	۴	ریشه‌های مشتق ۱ و ۱ـ است بنابراین درهریک از فاصله‌های $x\geqslant 1$ $-1\leqslant x\leqslant 1$ و $x\leqslant -1$ تابع پیوسته و همواره صعودی یا نزولی است و باتوجه به جوابها $1\leqslant x\leqslant 3$ نتیجه می‌شود .
۳۹۸	۳	عددهای بزرگتر از ۱ جذرشان نیز ازیک‌بزرگتراست‌پس به‌ازاء $x\geqslant 1$ تابع صعودی است و . . .
۳۹۹	۴	تابعهائی به‌صورت کلی $y=\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}$ با فرض

شماره شماره **راهنمای تعیین جواب درست**

تست ـ جواب

$a<b$ دامنه تعریفشان $a\leqslant x\leqslant b$ بوده‌و دارای ماکزیمم می‌باشند



منحنی تابع $y=|x^3|$ به‌شکل بوده‌و معکوس‌پذیر نمی‌باشند تابعهائی به‌صورت $y=ax+b-\sqrt{a'x+b'}$ اگر a و a' هر دو مثبت‌باشند دارای می‌نیمم بوده و در دامنه تعریفشان معکوس پذیر نیستند (مطالب درسی جبر)

تابع $y=x-\sqrt{x^2+4}$ همواره پیوسته صعودی است

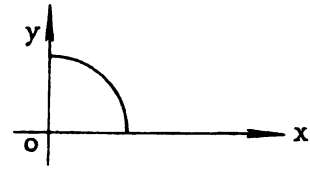
۴۰۰ ۱ تابع $y=x+\sqrt{2x}$ دردامنه تعریفش پیوسته و صعودی‌است تابع از مبداء مختصات می‌گذرد . معکوس آن‌هم باید از مبداء بگذرد . همچنین باید توجه داشت که تابع معکوس این نوع تابعها هیچگاه‌خود تابع نمی‌تواند باشد .

---

۴۰۱ ۳ تابع معکوس تابع $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$, تابع $y=\frac{b-b'x}{a'x-a}$ است . این تابع یک تابع هموگرافیک است . با انتخاب نقطه مناسب می‌توان تابع معکوس را جستجو کرد . اگر مرکز تقارن منحنی تابع روی نیمساز ربع اول باشد خط $y=x$ محور تقارن تابع بوده و معکوس آن خود تابع می‌باشد دراین مثال نقطه $O'(۲و۲)$ مرکز تقارن تابع و بر روی نیمساز ناحیه اول واقع است .

---

۴۰۲ ۲ باتوجه به شرط داده شده ، شکل ربع دایره است و چون‌خط $y=x$



شماره تست	شماره جواب	راهنمای تعیین جواب درست
		محور تقارن آن است تابع معکوس این تابع بر خودش منطبق است .
۴۰۳	۴	تابعهای ۱و۲و۳ دردامنه تعریفشان پیوسته و همواره صعودی می‌باشندو بنابراین معکوس پذیرند . اما تابع ۴ به ازاء $x\geqslant 2$ صعودی و $x\leqslant -2$ نزولی است . $y'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$
۴۰۴	۴	$x=\sqrt[3]{y^2-1}$ $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ $A\left\vert\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$,$m=y_{(3)}=\frac{2.3}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{2}$

علی حسن زاده ماکوئی
علی اکبر جعفری
احمد فیروزنیا
علی اکبر جعفری

T

مثلثات

۱.۱ ــ موضوع مثلثات

می‌دانیم که اگر از شش جزء اصلی مثلثی (سه ضلع و سه زاویه) سه جزء معلوم باشد (به‌شرط آنکه حداقل یکی از آنها ضلع باشد) مثلث قابل ترسیم است . ولی برای محاسبه اجزاء نامعلوم در هندسه روش مشخصی ارائه نشده است ، برای انجام این مقصود (محاسبه اجزاء مجهول از روی اجزاء معلوم) از روابطی که در مثلثات مطرح می‌گردد می‌توان استفاده نمود .

۲.۱ اندازه کمان از یک دایره

عددی که از سنجیدن یک کمان از محیط دایره‌ای (یا زاویه مرکزی مقابل آن کمان) با کمان دیگری از همین دایره که به عنوان واحد انتخاب شده است بدست می‌آید اندازه آن کمان می‌نامند .

برای اندازه‌گیری کمان سه نوع واحد بکار می‌برند که عبارت‌اند از :

الف ــ درجه

اندازه زاویهٔ مرکزی است از یک دایره ، که کمان مقابل آن برابر $\frac{1}{360}$ محیط دایره است اجزاء درجه عبارت است از : دقیقه $\frac{1}{60}$ درجه ، ثانیه $\frac{1}{60}$ دقیقه معمولاً" درجه را با نماد (D) نشان می‌دهند و علامت درجه (°) ، دقیقه (') و ثانیه (") است .

مثال:

۱۵ درجه و ۱۲ دقیقه و ۲۷ ثانیه را چنین نشان می‌دهند "۲۷ '۱۲ °۱۵ .

ب ــ گراد

اندازه زاویه مرکزی است از یک دایره که کمان مقابل آن $\frac{1}{400}$ محیط دایره است . اجزاء گراد عبارت‌اند از دسی‌گراد ($\frac{1}{10}$) و سانتی‌گراد $\frac{1}{100}$ و میلی‌گراد ($\frac{1}{1000}$) گراد است . گراد را با نماد (G) نشان می‌دهند و علامت مشخصه‌ای ندارد .

مثال:

۲۴ گراد و ۵ سانتی‌گراد و ۷ میلی‌گراد را چنین ۲۴/۰۵۷ نشان می‌دهند .

پ ـ رادیان

اندازه زاویه مرکزی است از یک دایره که طول کمان مقابل آن در هر دایره برابر با شعاع آن دایره است. رادیان را با نماد (R) نشان می‌دهند، به این ترتیب محیط هر دایره برابر است با 360° یا ۴۰۰ گراد یا 2π رادیان.

تبصره:

نسبت طول محیط هر دایره بر طول قطر آن دایره عدد گنگی است که‌بانماد π (پی) نشان می‌دهند و مقدار آن ۳/۱۴۱۵۹۳۰۰۰ است.

در محاسبات معمولاً π را ۳/۱۴ و عکس آنرا ۰/۳۱۸۳ اختیار می‌کنند.

مثال ۱:

اندازه کمانی که برابر $\frac{1}{8}$ محیط دایره باشد، $\frac{\pi}{4}$ رادیان است.

مثال ۲۰

در دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتی‌متر اگر طول کمانی ۸ سانتی‌متر باشد اندازه آن کمان برحسب رادیان عبارت است از:

$$\frac{8^{cm}}{12cm} = \left(\frac{2}{3}\right)^{R}$$

به‌طور کلی اگر شعاع دایره‌ای r و طول کمانی از آن C و اندازه زاویه مرکزی مقابل کمان C ، ω رادیان باشد رابطهٔ $C=r.\omega$ برقرار است.

یعنی در هر دایره طول هر کمان برابر است با طول شعاع آن دایره ضرب درعدد زاویه مرکزی مقابل آن برحسب رادیان.

۳.۱ـ تبدیل واحدهای کمان

با توجه به تعریف واحدها بین سه واحد کمان رابطهٔ:

$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi} \qquad (1)$$

برقرار است و با استفاده از رابطهٔ (۱) هر یک از واحدها را می‌توان به واحد دیگرتبدیل نمود.

مثال:

24° معادل چند گراد و چند رادیان است؟

حل:

$$\frac{24}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow G=\frac{80}{3}\ ,\ R=\frac{2\pi}{15}$$

مسائل

۱ ــ کمان‌های زیر را برحسب رادیان بنویسید :

$$۶^\circ ، ۱۵^\circ ، ۴۰^\circ ، ۱۷۵^\circ ، ۶۳\pi^\circ$$

۲ ــ زاویه‌های زیر که به رادیان هستند برحسب درجه و گراد بنویسید :

$$\frac{\pi}{12} , \frac{2\pi}{9} , \frac{3\pi}{5} , \frac{40\pi}{27} , \frac{5}{6} , 1$$

۳ ــ زاویه بین دو عقربه ساعت در یک ربع بعد از ظهر چند درجه است؟

۴ ــ در دایره‌ای به شعاع ۲۵ سانتی‌متر طول کمان مقابل به زاویه ۲۴° چقدر است؟

۵ ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A = ۹۰^\circ$) عدد زاویه B برحسب درجه، x و عدد زاویه C برحسب گراد، y است اگر $x - y = ۵۲$ باشد زاویه‌های B و C را برحسب رادیان پیدا کنید.

۶ ــ کمان‌های α و β و γ به‌ترتیب جملات متوالی از یک تصاعد حسابی هستند اگر مجموع آنها ۲۵۰ گراد باشد اندازه کمان β برحسب رادیان کدام است؟

۷ ــ دونده‌ای $\frac{۱}{۱۲}$ دور میدانی را که شعاع آن ۱۳۵ متر می‌باشد طی کرده است این دونده چند گراد پیموده است؟

۸ ــ در ساعت ۳/۵ زاویه‌ایکه دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار با یک‌دیگر می‌سازند چند درجه و چند رادیان است؟

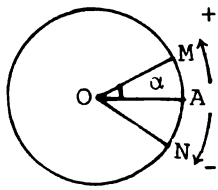
۹ ــ α و β و γ زوایائی هستند که در روابط زیر صدق می‌کنند :

اگر α و β برحسب رادیان باشند، $\alpha + \beta = (\frac{\pi}{15})$ و اگر β و γ برحسب گراد باشند، $\beta + \gamma = ۱۰^G$ اگر γ و α برحسب درجه باشند، $\gamma + \alpha = ۱۵^\circ$ اندازه آنها را برحسب رادیان معین کنید.

۱۰ ــ ثابت کنید در هر مثلث $3(A^2 + B^2 + C^2) \geqslant \pi^2$

راهنمائی به رابطهٔ $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx , (\forall x, y, z \in R)$ توجه کنید.

۱.۲ جهت مثلثاتی



شکل ۱

در هر دایره عکس جهت دوران عقربه‌های ساعت را جهت مثبت و موافق حرکت عقربه‌ها را جهت منفی اختیار کرده‌اند شکل (۱)

۲.۲ ــ کمان مثلثاتی

هرگاه متحرکی از نقطهٔ A (مبداء) شروع به‌حرکت کرده (در جهت مثبت یا منفی) پس از طی K بار دور دایره به نقطهٔ M برسد کمان، $\widehat{AM} = 2k\pi+\alpha$ را کمان مثلثاتی می‌نامند و به ازای ...و۱و۰= K ، ... و $2\pi+\alpha$ و $AM = \alpha$ شده‌وهریک از آنها یک کمان هندسی است ، بنابراین هر کمان مثلثاتی $K+1$ کمان هندسی است که اختلاف آنها از یکدیگر 2π رادیان می‌باشد .

مثال:

اگر $\varphi = 2k\pi + \alpha$ باشد $\frac{\varphi}{3}$ چند کمان مثلثاتی است؟

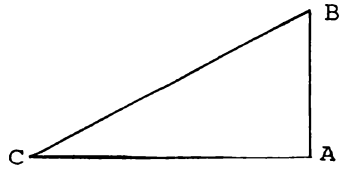
$\frac{\varphi}{3}$ ، سه کمان مثلثاتی است که انتهای آنها روءس مثلث متساوی‌الاضلاع هستند زیرا اختلاف دو انتهای کمان متوالی $\frac{2\pi}{3}$ است . به‌طورکلی، $AM=\frac{2K}{n}+\gamma$ ، $(n\in N)$ n کمان مثلثاتی بوده و انتهای آنها رووس یک n ضلعی منظم است ، زیرا اختلاف انتهای دو کمان متوالی $\frac{2\pi}{n}$ است .

۳.۲ ــ دایره مثلثاتی

دایره‌ایست جهت‌دار که شعاع آن واحد طول اختیار شده است .

۴.۲ ــ تابع مثلثاتی

روابطی که بین ضلع و زاویه (که دو کمیت با واحدهای مختلف می‌باشند) ، موجود است به‌صورت نسبت بیان می‌شوند ، این روابط را تابع های مثلثاتی یا نسبت‌های مثلثاتی می‌نامند . در مثلث قائم‌الزاویه ABC



شکل ۲

$\frac{AB}{BC} = \frac{\text{ضلع مقابل } C}{\text{وتر}} = \text{SinC}$ (سینوس) و

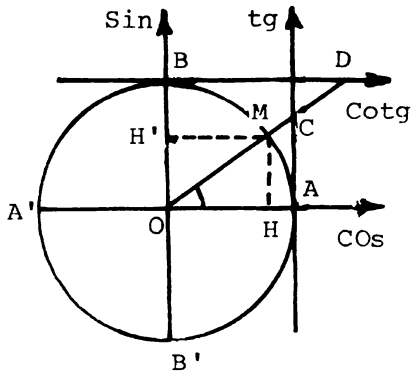
$\frac{AC}{BC} = \frac{\text{ضلع قائم مجاور } C}{\text{وتر}} = \text{CosC}$ (کسینوس)

$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{ضلع قائم مقابل } C}{\text{ضلع قائم مجاور } C} = \text{tgC}$ (تانژانت)

$\frac{AC}{AB} = \frac{\text{ضلع قائم مجاور } C}{\text{ضلع قائم مقابل } C} = \text{Cotg C}$ (کتانژانت) نام‌گذاری شده‌اند شکل (۲)

۵.۲ــ محورها

در دایرهٔ مثلثاتی دو قطر عمود بر هم (یکی افقی ، دیگری قائم) و دوممـاس‌به‌ترتیب از انتهای سمت راست قطر افقی (A) و از انتهای بالائی قطر قائم (B) بردایره‌مثلثاتی رسم می‌کنیم قطر افقی را محور Cos ها و قطر قائم را محور Sin ها ممـاس ,مرسوم از A را محور تانژانت‌ها و مماس مرسوم از B را محـور کتانژانت‌ها می‌نامند ، (شکل ۳) نقطـه A را مبداء کمان‌ها اختیار می‌کنند .



شکل ۳

۶.۲ــ بیان توابع مثلثاتی دردایره مثلثاتی

با توجه به شکل ۳ توابع مثلثاتی کمان α عبارتند از ،

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{\overline{OH'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{HM}}{1} = \overline{HM}$$

$$\cot g\,\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \overline{BD} \quad , \quad tg\,\alpha = \frac{\overline{HM}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \overline{AC}$$

تبصره:

غیر از چهار تابع فوق توابع دیگری را بنام سکانت (Secante) و کسکانت (CoseCante) تعریف نموده‌اند که با توجه به شکل ۳ به‌ترتیب عبارتند از :

$$\operatorname{Cosec}\alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{OH'}} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \overline{OD} \quad , \quad \sec\alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{OH}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

۷.۲ــ نواحی چهارگانه

محورهای Cos و Sin دایره مثلثاتی را به چهار ناحیه تقسیم نموده‌اند که‌به‌ترتیب جهت دوران مثبت ، ناحیه اول (کمان AB) و ناحیه دوم (کمان BA') ، ناحیه‌سوم‌کمان (A'B') و ناحیه چهارم کمان (B'A) است علامت نسبـت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه مزبور به ترتیب عبارتند : در محور Cos ها از مرکز دایره به سمت راست مثبت‌و خلاف آن منفی و در محور Sin ها از مرکز دایره به بالا مثبت و خلاف آن منفی است‌ودر محور tg ها از A به سمت بالا مثبت خلافش منفی و در محور Cotg ها از B به‌سمت راست مثبت برخلاف آن منفی است باین ترتیب نسبت‌های مثلثاتی کمان‌هائی که انتهای‌آنهادر

ناحیه اول (بین A و B) قرار دارند مثبت و Sin کمان‌هائی که انتهای آنهـا در ناحیه دوم (بین B و 'A) قرار دارند مثبت و بقیه منفی استو tg و Cotg کمان‌هائی که‌انتهای آنها در ناحیه سوم (بین 'A و 'B) قرار دارند مثبت و بقیه منفی و Cos کمان‌هائی که انتهای آنها در ناحیه چهارم (بین 'B و A) قرار دارند مثبت و بقیه منفی هستند .

۸.۲ــ تغییرات توابع مثلثاتی

با توجه به شکل ۳ جدول زیر تغییرات توابع مثلثاتی کمان‌هائی که انتهای آنها در یکی از نواحی چهارگانه قرار دارند نشان می‌دهد .

کمـان	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Sin	۰	↗	۱	↘	۰	↘	−۱	↗	۰
Cos	۱	↘	۰	↘	−۱	↗	۰	↗	۱
tg	۰	↗	+∞ | تعریف‌نشده	↗	۰	↗	+∞ | تعریف‌نشده	↗	۰
Cotg	تعریف‌نشده | + ∞	↘	۰	↘	− ∞ | تعریف‌نشده	↘	۰	↘	− ∞ | تعریف‌نشده

(جدول ۱)

تبصره (۱)

با توجه به جدول فوق ملاحظه می‌شود که تابع Sin در نواحی اول و چهـارم (نیم دایره راست) صعودی و در نواحی دوم و سوم (نیم‌دایره چـپ) نزولی و تـابع Cos در نواحی اول و دوم (نیم‌دایره بالا) نزولی و در نواحی سوم و چهارم (نیم‌دایره پائین) صعودی است و تابع tg همواره صعودی و تابع Cotg همواره نزولی است .

مثال:

اگر $0 < x < y < \pi$ باشد کدام یک از روابط زیر همواره برقرار است ؟

۱) $\sin x < \sin y$ ۲) $\cos y < \cos x$

۳) $\operatorname{tg} x < \operatorname{tg} y$ ۴) $\operatorname{cotg} x < \operatorname{cotg} y$

حل:

با توجه به مطالب بالا اولی صحیح نیست زیرا در فاصلهٔ مفروض تابع Sin گاهـی صعـودی و گـاهی نزولی اسـت . مثلاً" اگر $x = \frac{\pi}{3}$ و $y = \frac{5\pi}{6}$ باشد $x < y$ بوده

ولی $\sin x > \sin y$ است. جواب دومی صحیح است زیرا در این‌فاصله‌تابع Cos همواره نزولی است. جواب سومی نیز صحیح نیست چون تابع tg در $\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده (منفصل) است و جواب چهارمی هم اگر به صورت $\cot gx > \cot gy$ بود، صحیح بود زیرا تابع Cotg در این فاصله نزولی است.

تبصره (۲)

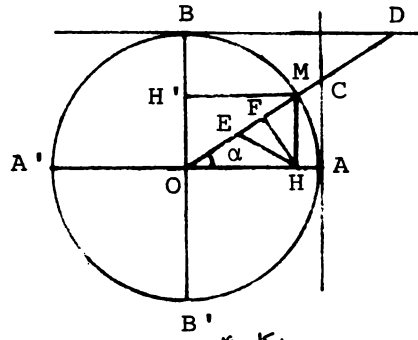
در توابع مثلثاتی اگر کمانی فاقد علامت باشد واحد آن کمان رادیان است.

مثال:

منظور از Sin2 یعنی سینوس ۲ رادیان بوده و نباید با $\sin 2^\circ$ و یا با $\sin 2^G$ که به‌ترتیب Sin، ۲ درجه و Sin ، ۲ گراد است اشتباه کرد.

۹.۲ ــ بررسی چند نامساوی

با توجه به شکل ۴ که یک دایره مثلثاتی بوده و در آن کمان α برحسب رادیان است داریم:



شکل ۴

۱ ــ AC(اندازه پاره‌خط) > AM (اندازه کمان) > HM (اندازه پاره‌خط)

نامساوی بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha \qquad (I)$$

توجه داشته باشید که در این نامساوی عدد کمان α که برحسب رادیان است منظور می‌باشد.

مثال:

$$\sin 1 < 1 < \operatorname{tg} 1 \quad , \quad \sin\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$$

۲ ــ در مثلث OHM داریم:

$$OH + HM > OM \Rightarrow \cos\alpha + \sin\alpha > 1$$

مثال:

اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد کدام یک از روابط زیر همواره درست است؟

۱) $x + \sin x > 1 - \cos x$ ۲) $\sin x + \cos x < x$

۳) $x + \sin x < 1 - \cos x$ ۴) $x + \sin x < tg x$

حل:

جواب اولی صحیح است زیرا در نامساوی $\sin x + \cos x > 1$، به‌طرف چپ عدد x را افزوده‌ایم .

۳ ــ در مثلث OHM ارتفاع ، HF و میانه ، HE را در نظر بگیریم ، داریم :

$$, \ HE = \frac{OM}{2} = \frac{1}{2} \geqslant HF$$

$$FH.OM = OH.HM = \sin\alpha \ . \ \cos\alpha \leqslant \frac{1}{2}$$

مثال:

اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد کدام یک از روابط زیر صحیح است؟

۱) $\log \sin x + \log \cos x < 1$

۲) $\log \sin x + \log \cos x \leqslant 0$

۳) $-1 < \log \sin x + \log \cos x < 0$

۴) $\log \sin x + \log \cos x < 0$

حل:

$$\log \sin x + \log \cos x = \log \sin x \cos x \leqslant \log \frac{1}{2} < 0$$

یعنی جواب چهارمی صحیح است .

یادآوری:

به‌طوری که بعداً" خواهیم دید رابطهٔ (۳) را از نامساوی $\sin 2x \leqslant 1$ نیز می‌توان نتیجه گرفت ولی منظور ما در اینجا بررسی روابط مثلثاتی به طریق هندسی است .

۴ــ $HM < AC < OC \Rightarrow \sin\alpha < tg\,\alpha < \sec\alpha$

$H'M < BD < OD \Rightarrow \cos\alpha < \cot g\,\alpha < \operatorname{cosec}\alpha$

مسائل

۱۱ــ مطلوب است تعیین کمان‌های مثلثاتی x و y که در روابط زیر صدق می‌کنند

$(k \text{ و } k' \in z)$

۱ــ $x+y = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$, $x-y = 2k'\pi + \frac{\pi}{6}$

۲ــ $x+y = k\pi + \frac{\pi}{6}$, $x-y = 2k'\pi - \frac{\pi}{3}$

۳ــ $x+y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $x-y = 2k'\pi - \frac{\pi}{6}$

۱۲ ــ در یک دایرهٔ جهت داری قطر افقی AA' را رسم کرده و کمان‌های هندسی AM به اندازه جبری 60° و AN به اندازه جبری (۱۵۰ــ) گراد را اختیار می‌کنیم اولاً" کمان‌های مثلثاتی AM و AN . ثانیاً" $A'M$ و $A'N$ را برحسب رادیان تعیین کنید .

۱۳ــ در روی دایره جهت‌دار به‌مبداء A (انتهای سمت راست قطر افقی) کمان‌های AC را به اندازه جبری 60° و AD را به اندازه جبری (30°ــ) اختیار کردیم اگر M وسط کمان DC باشد کمان مثلثاتی AM را برحسب درجه بنویسید .

۱۴ ــ بر یک دایره جهت‌دار نقاط A ، B ، C را چنان اختیار می‌کنیم که

$$(k_1, k_2 \in z), \quad BC = 2k_2\pi + \frac{\pi}{3}, \quad AC = 2k_1\pi + \frac{2\pi}{3}$$

اولاً" کمان مثلثاتی AB را بنویسید . ثانیاً" A' و B' و C' به‌ترتیب قرینه‌های نقاط A و B و C نسبت به مرکز دایره باشند ، نوع شش ضلعی $ABCA'B'C'$ را معین کرده و صورت کلی کمانی را برحسب رادیان بنویسید که رؤس شش ضلعی فوق را مشخص کند .

۱۵ ــ در دایره جهت‌داری نقاط A ، M ، N چنان واقع شده‌اند که یکی از اندازه‌های کمان AM برابر (۵۰ــ) گراد و یکی از اندازه‌های کمان AN برابر $\frac{\pi}{5}$ است رابطه کلی کمان مثلثاتی MN را معین کنید .

۱۶ــ در دایرهٔ جهت‌داری ده ضلعی منتظم ، $M_1M_2 \ldots M_{10}$ را محاط کردیم به‌طوری‌که اگر A (سمت راست قطر افقی دایره) مبداء کمان‌ها اختیار شود اندازه کمان هندسی AM_1 برابر ۲۰ گراد است ، رابطهٔ کلی برحسب درجه و گراد چنان معین کنید که بتوان از روی آن تمام رأس‌های ده ضلعی را تعیین کرد .

۱.۳ ــ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

الف ــ روابط اصلی

با توجه به شکل ۳ بین چهار تابع مثلثاتی سه رابطهٔ مستقل از هم می‌توان نوشت که به آنها روابط اصلی گفته می‌شود که عبارتند از:

۱) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ۲) $tg=\frac{\sin x}{\cos x}$

۳) $\cot g=\frac{\cos x}{\sin x}$

ب ــ با استفاده از روابط اصلی روابط دیگری را می‌توان نوشت که در حل مسائل کاربرد زیاد دارند. تعداد این روابط زیاد است. مهمترین آنها عبارتنداز:

۱) $tg^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$

۲) $1+\cot g^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$

۳) $tg x+\cot g x=\frac{1}{\sin x\cos x}$

۴) $tg x\,.\,\cot g x=1$

۵) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

۶) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

برای بررسی درستی روابط فوق به‌ترتیب داریم:

(۱) طرفین رابطهٔ ۱ اصلی را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم.

۲) طرفین رابطه ۱ اصلی را بر $\sin^2 x$ تقسیم می‌کنیم.

۳) $\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\,.\,\sin x}=\frac{1}{\sin x\cos x}$

۴) طرفین روابط (۲) و (۳) را در هم ضرب می‌کنیم.

۵) $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

۶) $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$

مثال ۱:

اگر $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ بوده و $tg x+\cot g x=4$ باشد مطلوبست مقدار $\sin x+\cos x$

حل:

$$\text{,}\ tgx + Cotgx = 4 \Rightarrow Sinx.\ Cosx = \frac{1}{4}$$

$$(Sinx + Cosx)^2 = 1 + 2Sinx\ Cosx = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$|Sinx + Cosx| = \frac{\sqrt{6}}{2}\ ,\ \pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow Sinx + Cosx = \frac{-\sqrt{6}}{2}$$

مثال ۲:

اگر $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ باشد حداکثر و حداقل عبارات:

$Sin^4x + Cos^4x$ و $Sin^6x + Cos^6x$

حل:

$$0 \leqslant Sinx\ .\ Cosx \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant Sin^4x + Cos^4x \leqslant 1 \\ \frac{1}{4} \leqslant Sin^6x + Cos^6x \leqslant 1 \end{cases}$$

۲.۳ ــ نسبت‌های مثلثاتی بعضی از کمان‌های مشخص

(۱) در شکل (۳) اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ باشد $Sin\alpha = \frac{\overline{OM}}{2} = \frac{۱}{۲}$ و با استفاده از اتحادهای اصلی نتیجه می‌شود: $Cos\ ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $tg\ ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $Cotg\ ۳۰^\circ = \sqrt{۳}$

(۲) اگر $\alpha = ۴۵^\circ$ باشد $Cotg\alpha = tg\alpha = ۱$ در نتیجه $Sin\ \alpha = Cos\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

(۳) اگر $\alpha = ۶۰^\circ$ باشد $Cos\ \alpha = \frac{۱}{۲}$ در نتیجه $Sin\ \alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $tg\alpha = \sqrt{۳}$ و $Cotg\ \alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

مطالب فوق را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد (جدول ۲)

کمان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Sin	$\frac{\sqrt{۱}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
Cos	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۱}}{۲}$
tg	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
Cotgα	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

(جدول ۲)

تبصره:

با توجه به جدول ۲ و شکل ۳ می‌توان نتیجه گرفت اگر $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ (دو زاویه β و α متمم یکدیگر باشند) :

$\text{Cotg}\,\alpha=\text{tg}\beta \quad , \text{tg}\alpha = \text{Cotg}\beta \quad , \text{Cos}\alpha = \text{Sin}\beta \quad , \text{Sin}\alpha = \text{Cos}\beta$

مثال ۱:

اگر $\text{Sin}18^\circ = x$ و $\text{Cos}36^\circ = y$ باشد کدام یک از روابط زیر صحیح است؟

۱) $x<y$ ۲) $x>y$

۳) $x = 2y$ ۴) $y = 2x$

حل:

جواب اولی صحیح است زیرا :

$$\text{Cos } 36^\circ = \text{Sin } 54^\circ > \text{Sin } 18^\circ$$

اســـت باستثنای حالتی که $ab'-ba'=0$ باشد . دراین حالت مشتق از درجه اول می‌باشد و تابع فقط دارای یک ماکزیمم و یا یک می‌نیمم می‌شود . بنابراین اگر

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$$

باشد ، تابع یک ماکزیمم یا یک می‌نیمم دارد . زیرا اگر قرار دهیم :

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=K \longrightarrow b'=Kb, \quad a'=Ka \qquad x+\frac{b}{2a}=X$$

داریم :

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{K(ax^2+bx)+c'}=$$

مسائل

۱۷ ــ مطلوب است محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های زیر درصورتی که:

۱ ــ $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ۲ ــ $\cos\beta = \frac{-5}{13}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

۳ ــ $tg\gamma = \frac{7}{24}$, $\pi<\gamma<\frac{3\pi}{2}$ ۴ ــ $\cot g\lambda = -7$, $\frac{3\pi}{2}<\lambda<2\pi$

۱۸ ــ مطلوب است محاسبهٔ مقادیر عددی عبارات زیر:

۱ ــ $2\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ + tg45^\circ$ ۲ ــ $2\cos 30^\circ - 4\cos 45^\circ + tg60^\circ$

۳ ــ $\frac{\cos 60^\circ}{1+\sin 60^\circ} + \frac{1}{tg30^\circ}$ ۴ ــ $\frac{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}{\cos 60^\circ + \cos 30^\circ}$

۱۹ ــ اگر $\cot g\alpha = -\frac{2}{3}$ ، $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ باشد مطلوب است مقدار عددی عبارت زیر.

$$A = \frac{4\sin^3\alpha - 9\cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$$

۲۰ ــ درستی $\sin 4^\circ \sin 4 < 0$ را بررسی کنید.

۲۱ ــ اگر $\sin\alpha . \cos\alpha > 0$ و $tg\alpha . \cos\alpha < 0$ باشد انتهای کمان α در کدام ناحیه قرار دارد؟

۲۲ ــ از رابطهٔ $\frac{5tgx - 3}{10tgx + 3} = \frac{1}{3}$ ، نسبت‌های مثلثاتی کمان حاده x را به‌دست آورید.

۲۳ ــ اگر زاویه α حاده و β منفرجه بوده و $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos\beta = -\frac{4}{5}$ باشد مقدار عددی عبارت ، $A = \frac{3tg\alpha + 2\cot g\beta}{4\cos\alpha - 2\sin\beta}$ را به دست آورید.

۲۴ ــ اگر $\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}$ و $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}$ باشد کمان‌های حاده α و β چقدراند؟

۲۵ ــ اگر $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ ، $x>1$ و $\sin\varphi = \frac{x-1}{x+1}$ باشد، اولاً" نسبت‌های مثلثاتی φ را به دست آورید. ثانیاً" اگر $\cot g\varphi = -2\sqrt{2}$ باشد، x چقدر است؟

۲۶ ــ عبارت $A = 2\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha(\cot g\alpha - tg\alpha)$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۲۷ ــ از رابطهٔ $tgx + \cot gx = \frac{3}{\cos x}$ نسبت‌های مثلثاتی کمان حاده x را تعیین کنید

۲۸ ــ اگر $\pi<\varphi<2\pi$ باشد. عبارت زیر را خلاصه کنید:

$$A = \sin\varphi - \sqrt{\cot g^2\varphi - \cos^2\varphi}$$

۲۹ ــ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A=90^\circ$)، $B<C$ و $tgB+tgC=6$ است تحقیق کنید $B<30^\circ$ است.

۳۰ ــ اگر $y=\frac{1+2\sqrt{x(1-x)}}{2x-1}$ و $x=\cos^2\varphi$ و $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi$ و $\varphi\neq\frac{3\pi}{4}$ باشد y را برحسب توابع مثلثاتی φ حساب کنید.

۳۱ ــ اگر $\cos x=\frac{a^2+b^2}{2ab}$ و $a.b>0$ باشد مطلوبست محاسبه، $y=\cos 5x-\cos 3x$

۳۲ ــ اگر انتهای کمان x در ناحیه اول و انتهای کمان y در ناحیه دوم باشد از رابطه $tgx+tgy=\frac{1}{6}$ و $Cotgx+Cotgy=-1$ نسبت‌های مثلثاتی x و y را معین کنید.

۳۳ ــ مطلوب است تعیین مقدار m به‌قسمی که داشته باشیم:

$$x\in R^+ \Rightarrow \sin\alpha=\frac{mx+1}{mx+2}\quad,\quad tg^2\alpha=\frac{(mx+1)^2}{2mx+m+2}$$

۳۴ــ اگر $\sin x+\sin y=2$ و $0<x$ و $y<360^\circ$ باشند حاصل عبارت زیر راحساب‌کنید

$$M=\frac{\sin(x+20)^\circ}{\sin(2y-70)^\circ}+tg(x+y)^\circ\ \sin x^\circ+Cotg(3x-50)^\circ\cos y^\circ$$

۳۵ ــ اگر $2\cos x=(a+1)\sqrt{2}$ و $tgx=a+1$ باشد مطلوب است تعیین‌مقدار a واندازه کمان حاده x

۳۶ ــ با شرط $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ ثابت کنید $1\leqslant\sin\varphi+\cos\varphi\leqslant\sqrt{2}$

۳۷ ــ اگر $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ باشد حدود m را چنان معین کنید که داشته باشیم:

$$tgx=\frac{m+2}{m}$$

۳۸ ــ اگر معادله: $(2\cos\alpha-1)x^2-4x+4\cos\alpha+2=0$ ریشه‌های‌حقیقی‌داشته باشند انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ دایره مثلثاتی واقع است.

۳۹ ــ در مثلث ABC، $tgC=\frac{1}{2}$ و $tgB=3$ و ضلع BC برابر ۱۴ سانتیمتراست طول‌ارتفاع AH را حساب کنید.

۴۰ــ ثابت کنید که عبارت، $A=\frac{2(1-\sin^3x-\cos^3x)}{\sin x+\cos x+2}$ مربع کامل است.

۴۱ ــ اگر اعداد a و b مثبت بوده و مربع کامل نباشد از روابط، $Cotg\,x=2+\sqrt{b}$ و $\sin x=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-1)}{4}$، مقادیر a و b و نسبت‌های مثلثاتی کمان x را حساب کنید.

۴۲ ـ از رابطهٔ: $a^3tg^3\alpha + b^3\ Cotg^2\alpha + c^3 Cotg\,\alpha = 3abc$ که در آن a ، b ، $c > 0$ و کمان α حاده است ، روابطه $c^5 = ab^4$ را نتیجه بگیرید .

(راهنمائی: رابطه $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ در نظر بگیرید) .

۴۳ ـ با شرط $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ ثابت کنید:

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi\,(\cos\varphi - \sin\varphi)} > 8$$

۴۴ ـ اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد ثابت کنید $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ (کنکور ۶۱)

۴۵ـ اگر $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \frac{\pi}{2}$ باشد ثابت کنید:

$$tga_1 < \frac{\sin a_1 + \sin a_2 + \ldots + \sin a_n}{\cos a_1 + \cos a_2 + \ldots + \cos a_n} < tga_n$$ کنکور ۶۳

۴۶ ـ برای آنکه عبارت: $M = a(\cos^6 x + \sin^6 x) + 6\sin^2 x\ \cos^2 x$ مستقل از x باشد مقدار a برابر است با:

۱) ۲

۲) ۲ـ

۳) ± 2

۴) به ازای جمیع مقادیر حقیقی a عبارت M به x بستگی ندارد .

۴۷ ـ اتحاد: $tgx + \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \frac{1}{\cos x}$ وقتی برقرار است که انتهای x :

۱) در ناحیه اول یا دوم واقع باشد .

۲) در ناحیه اول یا سوم واقع باشد .

۳) در ناحیه اول یا چهارم واقع باشد .

۴) در هر ناحیه‌ای واقع باشد .

۴۸ ـ اتحاد: $\frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha} = \frac{1 + 2\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}{2\cos^2\alpha - 1}$ وقتی برقرار است که انتهای کمان α

۱) در ناحیه اول یا چهارم واقع باشد .

۲) در ناحیه دوم یا چهارم واقع باشد .

۳) در ناحیه اول یا سوم واقع باشد.

۴) در هر ناحیه‌ای واقع باشد.

۴۹ ـ اگر در مثلث ABC رابطهٔ: $3\sin A + 2\sin B = 5$ برقرار باشد در آن‌صورت:

۱) زاویه C حاده است ۲) زاویه C منفرجه است

۳) زاویه C قائمه است ۴) رابطهٔ داده‌شده غیرممکن است

۵۰ ـ رابطهٔ $2m \sin x = m^2+1$ وقتی برقرار است که:

۱) انتهای x در ناحیه اول یا چهارم باشد.

۲) $x=90^\circ$ باشد.

۳) $x=90^\circ$ یا $x=270^\circ$ باشد.

۴) رابطهٔ داده شده غیرممکن است.

۵۱ ـ اگر tgx و Cotgx ریشه‌های معادلهٔ $y^2+by+b-2=0$ باشد مقدار $\frac{1}{\sin x \cos x}$ برابر است با:

۱) ۳- ۲) ۱

۳) ۱- ۴) ۳

۵۲ ـ اگر $t^2 < \frac{\pi^2}{4}$ باشد کدام یک از نامساوی‌های زیر همواره برقرار است؟

۱) $\cot g \frac{t}{2} > 1$ ۲) $tg \frac{t}{2} > 1$

۳) $\sin \frac{t}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\cos \frac{t}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$

۵۳ ـ برای آنکه معادلهٔ: $a(1-\sin x)=b(1+\cos x)$ ، $(a.b \neq 0)$ دارای جواب باشد لازم است a و b:

۱) هر دو مثبت باشند ۲) هر دو منفی باشند

۳) متحدالعلامه باشند ۴) مختلف‌العلامه باشند

۵۴ ـ در فاصله $[0, 2\pi]$ چند کمان است که در معادلهٔ $\sin x \cos^2 x=1$ صدق کند؟

۱) ۴ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) هیچ

۵۵ ـ اگر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ، $3x^2 - px + 1=0$ باشند حاصل $A = tg^3\alpha + \cot g^3\alpha$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۸

۳) ۱۲ ۴) بستگی به مقدار p دارد

۱.٤ ــ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

الف ــ

دو کمان قرینه، یعنی کمان‌هائی که انتهای آنها نسبت به محور کسینوس‌ها قرینه یک‌دیگراند.

$$\mathrm{Cotg}(-\alpha)=-\mathrm{Cotg}\alpha,\ \mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha,\ \mathrm{Cos}(-\alpha)=\mathrm{Cos}\alpha,\ \mathrm{Sin}(-\alpha)=-\mathrm{Sin}\alpha$$

مثال:

$$\mathrm{Cos}(-120^\circ)=\mathrm{Cos}120^\circ \quad , \quad \mathrm{Sin}(-37^\circ)=-\mathrm{Sin}37^\circ$$

$$\mathrm{Cotg}(-119^\circ)=-\mathrm{Cotg}119^\circ \quad , \quad \mathrm{tg}(-54^\circ)=-\mathrm{tg}54^\circ$$

ب ــ

دو کمان مکمل یعنی کمان‌هائی که انتهای آنها نسبت به محور سینوس‌ها قرینه یک‌دیگراند

$$\mathrm{Cos}(\pi-\alpha)=-\mathrm{Cos}\,\alpha \quad , \quad \mathrm{Sin}(\pi-\alpha)=\mathrm{Sin}\,\alpha$$

$$\mathrm{Cotg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{Cotg}\,\alpha \quad , \quad \mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$$

مثال:

$$\mathrm{Cos}110^\circ=\mathrm{Cos}(180-70)^\circ=-\mathrm{Cos}70^\circ\ ,$$

$$\mathrm{Sin}120^\circ=\mathrm{Sin}(180-60)^\circ=\mathrm{Sin}60^\circ$$

$$\mathrm{Cotg}145^\circ=\mathrm{Cotg}(180-45)^\circ=-\mathrm{Cotg}45^\circ\ ,$$

$$\mathrm{tg}125^\circ=\mathrm{tg}(180-55)^\circ=-\mathrm{tg}55^\circ$$

پ ــ

دوکمان که تفاضل آنها π است، یعنی کمان‌هائی که انتهای آنها نسبت به مرکز دایره مثلثاتی قرینه یک‌دیگراند.

$$\mathrm{Cos}(\pi+\alpha)=-\mathrm{Cos}\,\alpha \quad , \quad \mathrm{Sin}(\pi+\alpha)=-\mathrm{Sin}\,\alpha$$

$$\mathrm{Cotg}(\pi+\alpha)=\mathrm{Cotg}\,\alpha \quad , \quad \mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$$

مثال:

$$\mathrm{Cos}210^\circ=\mathrm{Cos}(180+30)^\circ=-\mathrm{Cos}30^\circ\ ,$$

$$\mathrm{Sin}225^\circ=\mathrm{Sin}(180+45)^\circ=-\mathrm{Sin}45^\circ$$

$$\mathrm{Cotg}190^\circ=\mathrm{Cotg}(180+10)^\circ=\mathrm{Cotg}10^\circ$$

$$\mathrm{tg}240^\circ=\mathrm{tg}(180+60)^\circ=\mathrm{tg}60^\circ$$

ت ــ

دو کمان متمم

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{Sin}\,\alpha \quad , \quad \mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$\mathrm{Cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\,\alpha \quad , \quad \mathrm{tg}(\pi-\alpha)=\mathrm{Cotg}\,\alpha$$

مثال:

$tg76^\circ = Cotg14^\circ \quad , \quad Sin37^\circ = Cos53^\circ$

ث ـ

دو کمانی که تفاضل آنها $\frac{\pi}{2}$ است:

$Cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -Sin\alpha \quad , \quad Sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = Cos\alpha$

$Cotg(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -tg\ \alpha \quad , \quad tg(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -Cotg\alpha$

مثال:

$Cos130^\circ = Cos(90 + 40)^\circ = -Sin40^\circ$,

$Cotg125^\circ = Cotg(90 + 35)^\circ = -Cotg35^\circ$,

$Sin110^\circ = Sin(90 + 20)^\circ = Cos20^\circ$

$tg117^\circ = tg(90 + 27)^\circ = -Cotg27^\circ$

ج ـ

دو کمانی که تفاضل آنها مضرب صحیحی از π است: $(k \in z)$

$Cos(k\pi + \varphi) = (-1)^k Cos\varphi \quad , \quad Sin(k\pi + \varphi) = (-1)^k Sin\ \varphi$

$Cotg(k\pi + \varphi) = Cotg\varphi \quad , \quad tg(k\pi + \varphi) = tg\ \varphi$

مثال:

$Cos(24\pi - \frac{\pi}{12}) = Cos(-\frac{\pi}{12}) = Cos\ \frac{\pi}{12}$,

$Sin(19\pi - \frac{\pi}{7}) = -Sin(-\frac{\pi}{7}) = Sin\ \frac{\pi}{7}$

$Cotg(-25\pi + \frac{\pi}{10}) = Cotg\ \frac{\pi}{10} \quad , \quad tg(27\pi + \frac{\pi}{9}) = tg\ \frac{\pi}{9}$

چ ـ

دو کمانی که تفاضل آنها مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ است: $(k \in z)$

$Cos[(2k+1)\frac{\pi}{2} + \alpha] = (-1)^{k+1} Sin\ \alpha$,

$Sin[(2k+1)\frac{\pi}{2} + \alpha] = (-1)^k Cos\ \alpha$

$Cotg[(2k+1)\frac{\pi}{2} + \alpha] = -tg\ \alpha \quad , \quad tg[(2k+1)\frac{\pi}{2} + \alpha] = -Cotg\alpha$

مثال:

$Sin(\frac{19\pi}{2} + \frac{\pi}{5}) = (-1)^9 Cos\ \frac{\pi}{5} = -Cos\ \frac{\pi}{5}$

$$\cos\left(\frac{23\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=-\operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)=-\sin\frac{\pi}{7}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{17\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)=-\operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{9}\right)=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{9}$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{15\pi}{2}+\frac{\pi}{11}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{11}$$

۲.٤ ــ تناوب درتابع های مثلثاتی

هرگاه تابع ، $y=f(x)$ در رابطهٔ زیر صدق کند ، $f(x)$ یک تابع متناوب است

$$(1)\quad f(x)=f(x\pm\alpha)=\ldots=f(x\pm k\alpha),\quad (k\in z)$$

مثال:

تابع ، $y=\sin x$ متناوب است زیرا:

$$\sin x=\sin(x\pm 2\pi)=\sin(x\pm 2\times 2\pi)=\ldots=\sin(x\pm 2k\pi)$$

۳.٤ ــ دورهٔ تناوب درتابع های مثلثاتی

کوچکترین کمان مثبتی که می‌توان به x اضافه کرد تا تابع تغییر نکند دورهٔ تناوب آن تابع است .

مثال:

دورهٔ تناوب $y=\cos 2x$ برابر π و دورهٔ تناوب ، $y=\operatorname{tg}\frac{3x}{2}$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ است زیرا:

$$\cos 2(x+\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos 2x$$

و

$$\operatorname{tg}\frac{3}{2}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}+\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{3x}{2}$$

برای تعیین دوره تناوب توابع مثلثاتی می‌توان از دستورات زیر استفاده کرد .

۱ ــ دورهٔ تناوب توابع ، $\sin x$ و $\cos x$ و به طور کلی $(\sin x)^{2n+1}$ و $(\cos x)^{2n+1}$ برابر 2π و دورهٔ تناوب ، $(\sin x)^{2n}$ و $(\cos x)^{2n}$ ، $n\in N$ برابر π است .

مثال:

$$y=|\cos x|\Rightarrow T=\pi\quad,\quad y=\sin^3 x\Rightarrow T=2\pi$$

۲ــ دورهٔ تناوب $\operatorname{cotg}x,\operatorname{tg}x$ و با هر توانی برابر π است .

مثال:

$$g=\operatorname{cotg}^3 x\Rightarrow T=\pi\quad,\quad g=\operatorname{tg}^2 x\Rightarrow T=\pi$$

۳ ــ در هریک از توابع فوق اگر x ضریب داشته باشد دورهٔ تناوب آن تابع را به

ضریب x تقسیم می‌کنیم .

مثال:

$$y = 3\cos^4 5x \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \quad , \quad y = \sin^5 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

۴ ــ اگر تابع دارای چند دورهٔ تناوب جزء باشد کوچکترین مضرب مشترک دوره‌های جزء ، دورهٔ تناوب تابع است .

مثال:

تابع $y = 4\sin 3x - 3tg2x+1$ ، را در نظر می‌گیریم دوره تناوب جملهٔ اول $\frac{2\pi}{3}$ و دورهٔ تناوب جملهٔ دوم $\frac{\pi}{2}$ است و کوچکترین مضرب مشترک دوره‌های مزبور عبارت است از :

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} \quad , \quad \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} \Rightarrow \frac{12\pi}{6} = 2\pi$$

تبصره:

در به کار بردن دستورات فوق باید دقت بیشتری کرد زیرا ممکن است دورهٔ تناوب تابع کوچکتر از دورهٔ تناوب بدست آمده وسیله دستورات فوق باشد . بنابراین برای اطمینان بهتر است نصف دوره تناوب تعیین شده را با توجه به رابطهٔ (۱) امتحان کرد .

مثال:

دورهٔ تناوب تابع ، $f(x) = \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x - 3\cos x}$ با استفاده از دستوارت ۱ و ۴ 2π به دست می‌آید ولی دورهٔ تناوب تابع π می‌باشد زیرا :

$$f(x+\pi) = \frac{3\sin(x+\pi) + 2\cos(x+\pi)}{2\sin(x+\pi) - 3\cos(x+\pi)} \Rightarrow$$

$$f(x+\pi) = \frac{-3\sin x - 2\cos x}{-2\sin x + 3\cos x} = f(x)$$

۳.٤ ــ بعضی ازتوابع مثلثاتی متناوب نیستند مانند:

۱ ــ تابع هائی که کمان آنها جبری غیرخطی باشد مانند $tg\sqrt{x}$ یا $\sin x^2$ ولی توجه داشته باشید توابعی که کمان آنها مثلثاتی است مانند ، $\sin(\cos x)$ ، $\sin(tgx)$ متناوب بوده و دورهٔ تناوب آنها همان دوره تناوب $\cos x$ و $tg x$ است .

۲ ــ تابع هائی که بین دوره‌های تناوب جزء آنها کوچکترین مضرب مشترک موجود نباشد .

مثال:

تابع $y = \sin\frac{\pi}{2}x + \cos 2x$ را در نظر می‌گیریم دورهٔ تناوب جملهٔ اول $T_1 = 2\pi : \frac{\pi}{2} = 4$ و دورهٔ تناوب جملهٔ دوم ، $T_2 = 2\pi : 2 = \pi$ و بین عدد گویای ۴ و عدد اصم π کوچکترین مضرب مشترک موجود نیست .

۳ ـ تابع هائی که شامل خود کمان هستند مانند $y = 2\sin x + x$

۲.۵ ـ تابع های معکوس

۱ ـ تابع ، $y = \text{Arc Sin}\,x$ ، تابع معکوس $y = \sin x$ است که در آن عدد x در فاصله [۱و۱ـ]بوده و کمان y در فاصله $[-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}]$ است

۲ ـ تابع ، $y = \text{ArcCos}\,x$ ، تابع معکوس $y = \cos x$ است که در آن عدد x درفاصله [۱و۱ـ] بوده و کمان y در فاصله [۰و π] است .

۳ ـ تابع ، $y = \text{Arctg}\,x$ ، تابع معکوس، $y = \text{tg}\,x$ است که در آن x عددی است حقیقی و کمان y در فاصله $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ است .

۴ ـ تابع $y = \text{ArcCotg}\,x$ تابع معکوس $y = \text{Cotg}\,x$ است که در آن x عددی است حقیقی و کمان y در فاصله [۰و π] است .

به‌طور کلی مطالب فوق را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد :

$$|x| \leqslant 1 \;,\; 0 \leqslant \text{ArcCos}\,x \leqslant \pi \;,\; -\frac{\pi}{2} \leqslant \text{ArcSin}\,x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$x \in R \;,\; 0 < \text{ArcCotg}\,x < \pi \;,\; -\frac{\pi}{2} < \text{Arctg}\,x < \frac{\pi}{2}$$

تبصره:

با توجه به مطالب فوق توابع ، Arctgx و ArcSinx صعودی و توابع ،ArcCotgx و ArcCosx نزولی‌اند .

مثال ۱:

$$\text{ArcSin}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\pi}{4} \;,\quad \text{ArcSin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

مثال ۲:

$$\text{ArcCos}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \;,\quad \text{ArcCos}\,\frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

مثال ۳:

$$\text{Arctg}(-1) = \frac{-\pi}{4} \;,\quad \text{Arctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

مثال ٤ :

$$\text{Arc Cotg}\,(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6} \;,\quad \text{Arc Cotg}\,1 = \frac{\pi}{4}$$

۲.۵ ـ روابط بین توابع معکوس مثلثاتی

$$\text{ArcSin}\,x = \begin{cases} \text{ArcCos}\,\sqrt{1-x^2} & \text{به‌ازای } 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad -1 \\ -\text{ArcCos}\,\sqrt{1-x^2} & \text{به‌ازای } -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Arc Sin}x = \text{Arc tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{به ازای} \quad |x| < 1$$

$$\text{ArcSin}x = \begin{cases} \text{ArcCotg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{به ازای} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \text{Arc Cotg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi & \text{به ازای} \quad -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

۲ –

$$\text{Arc Cos}x = \begin{cases} \text{ArcSin}\sqrt{1-x^2} & \text{به ازای} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi - \text{ArcSin}\sqrt{1-x^2} & \text{به ازای} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\text{Arc Cos}x = \begin{cases} \text{Arc tg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{به ازای} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \text{Arc tg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \pi & \text{به ازای} \quad -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Arc Cos}x = \text{Arc Cotg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{به ازای} \quad |x| < 1$$

۳ –

$$\text{Arc tg}x = \text{ArcSin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad x \in R$$

$$\text{Arc tg}x = \begin{cases} \text{ArcCos}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \text{به ازای} \quad x \geqslant 0 \\ \text{ArcCos}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}} + \pi & \text{به ازای} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Arc tg}x = \begin{cases} \text{Arc Cotg}\dfrac{1}{x} & \text{به ازای} \quad x > 0 \\ \text{Arc Cotg}\dfrac{1}{x} - \pi & \text{به ازای} \quad x < 0 \end{cases}$$

۴ –

$$\text{Arc Cotg}x = \begin{cases} \text{ArcSin}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{به‌ازای} \quad x \geqslant 0 \\ \pi - \text{ArcSin}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{به‌ازای} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Arc Cotg}\, x = \text{ArcCos}\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ , \qquad x \in R$$

$$\text{Arc Cotg}\, x = \begin{cases} \text{Arc tg}\,\frac{1}{x} & \text{به ازای} \quad x>0 \\ \pi + \text{Arctg}\,\frac{1}{x} & \text{به ازای} \quad x<0 \end{cases}$$

۳.۵ــ فرد وزوج بودن توابع معکوس

تابع فرد است ، $\text{ArcSin}(-x) = -\text{Arc Sin}x$

تابع فرد است ، $\text{Arc tg}\,(-x) = -\text{Arc tg}\,x$

تابع نه فرد است و نه زوج ، $\text{Arc Cos}\,(-x) = \pi - \text{Arc Cos}x$

تابع نه فرد است و نه زوج ، $\text{Arc Cotg}\,(-x) = \pi - \text{Arc Cotg}x$

تبصره:

روابط زیر را که با توجه به تعریف تابع های معکوس به آسانی می‌توان نتیجه گرفت به‌خاطر بسپارید .

۱ ــ $|x| \leqslant 1$ ، $\text{Arc Sin}x + \text{Arc Cos}\,x = \frac{\pi}{2}$ ، یعنی کمانی که Sin آن برابر x باشد متمم کمانی است که Cos آن برابر x است .

۲ ــ $\text{Arc tg}x + \text{Arc Cotg}\ x = \frac{\pi}{2}\ , x \in R$

یعنی کمانی که tg آن برابر x است متمم کمانی است که Cotg آن برابر x است .

مثال:

$$\text{Arc Sin}\frac{2}{3} + \text{Arc Cos}\frac{2}{3} = \frac{\pi}{2}$$

و

$$\text{Arc tg}\,(-\sqrt{3}) + \text{Arc Cotg}\,(-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$$

۴.۵ ــ روابط معکوس درتوابع معکوس

۱ ــ اگر $\frac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ باشد ، $\text{ArcSin Sin}x = x$ ، اگر x خارج ازفاصله $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ باشد پس از حذف مضارب 2π (درصورت موجود بودن) با استفاده از دستورات بند ۴ به جای x کمانی قرار می‌دهیم که سینوس‌هایشان برابر باشند .

مثال ۱:

$$\text{Arc Sin Sin}\,(\frac{-}{6}) = \frac{-\pi}{6}\ , \quad \text{Arc Sin Sin}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

مثال ۲:

$$,\ \text{ArcSin Sin}\frac{5\pi}{3} = \text{ArcSin Sin}\,(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \text{ArcSin Sin}\frac{-\pi}{3} = \frac{-\pi}{3}$$

$$\text{Arc Sin Sin}\frac{19\pi}{6} = \text{Arc Sin Sin}(3\pi + \frac{\pi}{6}) = \text{Arc Sin Sin}(\frac{-\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6}$$

۲ ــ اگر $0 \leqslant x \leqslant \pi$ باشد ، $\text{ArcCos Cos}x = x$ ، اگر x در فاصله $[0 \text{ و } \pi]$ نباشد مانند حالت قبل پس از حذف مضارب 2π با توجه به دستورات بند ۴ به جای x کمانی قرار می‌دهیم که کسینوسهایشان برابر باشند .

مثال ۱:

$$\text{ArcCos Cos}\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad \text{ArcCos Cos}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

مثال ۲:

$$, \ \text{Arc Cos Cos}(\frac{-\pi}{3}) = \text{Arc Cos Cos}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{ArcCos Cos}\ (\frac{-27\pi}{7}) = \text{Arc Cos Cos}(-4\pi + \frac{\pi}{7}) = \text{Arc Cos Cos}\frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$$

۳ ــ اگر $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ باشد ، $\text{Arctg tg}x = x$ ، اگر x در فاصله $[\frac{-\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}]$ نباشد مانند حالات قبل عمل می‌کنیم .

مثال:

$$\text{Arctg tg}\ (-\frac{28\pi}{9}) = \text{Arctg tg}\ (-3\pi - \frac{\pi}{9}) = \frac{-\pi}{9} \quad ,$$

$$\text{Arctg tg}\ \frac{\pi}{11} = \frac{\pi}{11}$$

۴ ــ اگر $0 < x < \pi$ باشد ، $\text{ArcCotg Cotg}x = x$ اگر x در فاصله $[0 \text{ و } \pi]$ نباشد پس از حذف مضارب π مانند حالات قبل عمل می‌کنیم .

مثال ۱:

$$\text{Arc Cotg Cotg}(\frac{27}{8}\pi) = \text{ArcCotg Cotg}\ (3\pi + \frac{3\pi}{8}) = \frac{3\pi}{8}$$

مثال ۲:

$$\text{Arc Cotg Cotg}(\frac{-31}{5}\pi) = \text{Arc CotgCotg}(\frac{4\pi}{5}) = \frac{4\pi}{5}$$

۵ ــ $\text{ArcSin}(\text{Cos}\ \varphi) = \frac{\pi}{2} - \text{ArcCosCos}\ \varphi$

۶ ــ $\text{Arc tg}\ (\text{Cotg}\ \varphi) = \frac{\pi}{2} - \text{ArcCotgCotg}\ \varphi$

برای تحقیق صحت روابط ۵ و ۶ به‌تبصره بند ۳۰۵ توجه کنید که به جای x به‌ترتیب $\text{Cos}\varphi$ و Cotg قرار دادیم .

۱.۶ ــ نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های (a+b) برحسب نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های a و b

۱ ــ $\text{Sin}(a+b) = \text{Sina Cosb} + \text{Cosa Sinb}$

۲ ــ $\text{Sin}(a-b) = \text{Sina Cos b} - \text{Cosa Sinb}$

۳ ــ $\text{Cos}(a+b) = \text{Cosa Cosb} - \text{Sina Sinb}$

۴- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

۵- $\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}\ ,\ a,b,a+b\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

۶- $\operatorname{tg}(a-b)=\dfrac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}\ ,\ a,b,a-b\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

۷- $\operatorname{Cotg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{Cotg}a\operatorname{Cotg}b-1}{\operatorname{Cotg}b+\operatorname{Cotg}a}\ ,\ a,b,\ a+b\neq k\pi$

۸- $\operatorname{Cotg}(a-b)=\dfrac{\operatorname{Cotg}a\operatorname{Cotg}b+1}{\operatorname{Cotg}b-\operatorname{Cotg}a}\ ,\ a,b,\ a-b\neq k\pi$

تبصره:

روابط زیر را که در حل مسائل کاربرد زیاد دارند به‌خاطر بسپارید.

۱- $\sin(a+b).\sin(a-b)=\sin^2a-\sin^2b$

زیرا:

$$\sin(a+b).\sin(a-b)=\sin^2a\cos^2b-\cos^2a\sin^2b=$$
$$\sin^2(1-\sin^2b)-\sin^2b(1-\sin^2a)=\sin^2a-\sin^2b$$

۲- $\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos^2a-\sin^2b$

مثال:

اگر

$$\sin xy=\sin^2x+\sin^2y+\cos(x+y)\cos(x-y)$$

باشد y برحسب x :

۱) تابعی درجه اول است ۲) تابعی هموگرافیک است

۳) y برحسب x قابل محاسبه نیست ۴) تابعی گنگ است

حل:

جواب صحیح دومی است زیرا:

$$\sin xy=\sin^2x+\sin^2y+\cos^2x-\sin^2y\ \Rightarrow\ \sin xy=1\Rightarrow$$
$$xy=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ y=\frac{(4k+1)\pi}{2x}$$

۳- $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\ \sin(\frac{\pi}{4}+x)=\sqrt{2}\ \cos(\frac{\pi}{4}-x)$

۴- $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\ \sin x(\frac{\pi}{4}-x)=\sqrt{2}\ \cos(\frac{\pi}{4}+x)$

زیرا

$$\cos x\pm\sin x=\sqrt{2}\ (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)=\sqrt{2}\ \sin(\frac{\pi}{4}\pm x)=$$

$\sqrt{2}\ \cos(\frac{\pi}{4} \mp x)$

مثال:

حداکثر و حداقل عبارت $\sin x \pm \cos x$ چقدر است؟

حل:

$$\sqrt{2} \times -1 \leqslant \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\ \sin(\frac{\pi}{4} \pm x) \leqslant \sqrt{2} \times 1$$

۵ —

$$A+B+C=K\pi \Rightarrow \begin{cases} tgA + tgB + tgC = tgA\ tgB\ tgC \\ CotgA\ CotgB + CotgB\ CotgC + CotgC\ CotgA = 1 \end{cases}$$

$K \in Z$

مثال:

درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید

۱— $tg3x - tg2x - tgx = tgx\ tg2x\ tg3x$

حل:

$3x + (-2x) + (-x) = 0 \quad \Rightarrow$

$tg3x + tg(-2x) + tg(-x) = tg3x\ tg(-2x)\ tg(-x)$

و یا

$tg3x - tg2x - tgx = tg3x\ tg2x\ tgx$

۲— $Cotg(a-b)Cotg(b-c) + Cotg(b-c)Cotg(c-a) +$

$Cotg(c-a)Cotg(a-b) = 1$

حل:

با فرض $a-b=x$ و $b-c=y$ و $c-a=z$ داریم $x+y+z=0$

پس

$Cotgx\ Cotgy + Cotgy\ Cotgz + Cotgz\ Cotgx = 1$

۶—

$$A+B+C=(2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} tgA\ tgB + tgB\ tgC + tgC\ tgA = 1 \\ CotgA + CotgB + CotgC = CotgA\ CotgB\ CotgC \end{cases}$$

$K \in Z$

اثبات:

$$A+B=k\pi+(\frac{\pi}{2}-C) = \begin{cases} tg(A+B) = tg(\frac{\pi}{2}-C) = CotgC = \frac{1}{tgC} \\ Cotg(A+B) = tgC = \frac{1}{CotgC} \end{cases}$$

پس از بسط هر یک از روابط فوق مانند حالت قبل روابط (۲) نتیجه می‌شود.

مثال:

مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = tg17^\circ tg20^\circ + tg20^\circ tg53^\circ + tg53^\circ tg17^\circ$$

$$۱۷^\circ + ۲۰^\circ + ۵۳^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow A = ۱$$

۲.۶ ــ نسبتهای مثلثاتی ۲a برحسب نسبتهای مثلثاتی a

$$Cos2a = Cos^2a - Sin^2a = 1-2Sin^2a = 2Cos^2a - 1 \qquad (۱)$$

$$Sin2a = 2SinaCosa \qquad (۲)$$

(۳) رابطه (۱) را به صورت زیر که مورد استعمال زیاد دارند نیز می‌توان نوشت

$$Cos^2a = \frac{1+Cos2a}{2}, \quad Sin^2a = \frac{1-Cos2a}{2}$$

$$tg2a = \frac{2tga}{1-tg^2a}, \quad 2a, a \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (۴)$$

$$Cotg2a = \frac{Cotg^2a-1}{2Cotga}, \quad 2a, a \neq k\pi$$

۳.۶ ــ نسبتهای مثلثاتی sin2a و cos2a برحسب tga

$$Cos2a = \frac{1-tg^2a}{1+tg^2a} \ (۲ \qquad Sin2a = \frac{2tga}{1+tg^2a} \ (۱$$

تبصره(۱) رابطه (۲) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$tg^2a = \frac{1-Cos2a}{1+Cos2a}$$

تبصره(۲) در روابط (۱) و (۲) اگر ۲a را به a تبدیل کنیم آن روابط به صورت زیر درمی‌آید

$$Cosa = \frac{1-tg^2\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}} \quad و \quad Sina = \frac{2\,tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$$

۴.۶ ــ نسبتهای مثلثاتی کمان 3a برحسب نسبتهای مثلثاتی

$$Sin3a = 3Sina - 4Sin^3a \qquad (۱$$

$$Cos3a = 4Cos^3a - 3Cosa \qquad (۲$$

$$tg3a = \frac{3tga - tg^3a}{1-3tg^2a} \qquad (۳$$

$$\text{Cotg}3a = \frac{3\text{Cotg}a - \text{Cotg}^3 a}{1 - 3\,\text{Cotg}^2 a} \qquad (۴$$

روابط زیر را که در حل مسائل کاربرد زیاد دارند به‌خاطر بسپارید

۱ـ $4\text{Sin}x \,.\, \text{Sin}(\frac{\pi}{3} - x) . \text{Sin}(\frac{\pi}{3} + x) = \text{Sin}3x$

اثبات:

$$4\text{Sin}x\ \text{Sin}(\frac{\pi}{3} - x) . \text{Sin}(\frac{\pi}{3} + x) = 4\text{Sin}x . (\text{Sin}^2 \frac{\pi}{3} - \text{Sin}^2 x) =$$

$$\text{Sin}x(3 - 4\text{Sin}^2 x) = 3\text{Sin}x - 4\,\text{Sin}^3 x = \text{Sin}3x$$

۲ـ

$$4\text{Cos}x\ \text{Cos}(\frac{\pi}{3} - x)\text{Cos}(\frac{\pi}{3} + x) = \text{Cos}3x$$

$$4\text{Cos}x\ \text{Cos}(\frac{\pi}{3} - x)\text{Cos}(\frac{\pi}{3} + x) = 4\text{Cos}x(\text{Cos}^2 x - \text{Sin}^2 \frac{\pi}{3}) =$$

$$\text{Cos}x(4\text{Cos}^2 x - 3) = 4\text{Cos}^3 x - 3\text{Cos}x = \text{Cos}3x$$

۳ـ از تقسیم رابطه (۱) بر رابطه (۲) نتیجه می‌شود.

$$\text{tg}x\ \text{tg}(\frac{\pi}{3} - x)\text{tg}(\frac{\pi}{3} + x) = \text{tg}3x$$

۴ـ $\text{Cotg}x - \text{tg}x = 2\text{Cotg}2x$

زیرا:

$$\text{Cotg}x - \text{tg}x = \frac{\text{Cos}^2 x - \text{Sin}^2 x}{\text{Cos}x\ \text{Sin}x} = \frac{2\text{Cos}2x}{\text{Sin}2x} = 2\text{Cotg}2x$$

۵ـ $\text{tg}x + \text{tg}(x + \frac{\pi}{3}) + \text{tg}(x + \frac{2\pi}{3}) = 3\text{tg}3x$

اثبات:

$$\text{tg}x + \frac{\text{tg}x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\,\text{tg}x} + \frac{\text{tg}x - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\ \text{tg}x} = \frac{3(3\text{tg}x - \text{tg}^3 x)}{1 - 3\text{tg}^2 x} = 3\text{tg}3x$$

۵.۶ ـ محاسبهٔ تابع‌های مثلثاتی کمان nx ($n \in N$) برحسب نسبتهای مثلثاتی x به عنوان مثال توابع مثلثاتی $5x$ را حساب می‌کنیم.

الف ـ برای محاسبهٔ، $\text{Sin}5x$ و $\text{Cos}5x$ ، بسط زیر را درنظر می‌گیریم

$$(C + S)^5 = C^5 + 5C^4 S + 10C^3 S^2 + 10C^2 S^3 + 5CS^4 + S^5 \qquad (۱)$$

در رابطه بالا، C نماد $\text{Cos}x$ و S نماد Sin است از رابطهٔ (۱) جمله‌هائی که توان S فرد است برای بسط $\text{Sin}5x$ و جمله‌هائی که توان S زوج است برای بسط $\text{Cos}5x$

اختیار کرده و علامت آن جملات را به ترتیب یک در میان مثبت و منفی می‌نویسیم به‌این ترتیب:

$$(I)\quad \sin 5x = 5\sin x\cos^4 x - 10\sin^3 x\cos^2 x + \sin^5 x$$

$$(II)\quad \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$$

حال اگر در رابطهٔ (I) $\cos^2 x$ را به $1-\sin^2 x$ و دررابطهٔ (II) $\sin^2 x$ را به $1-\cos^2 x$ تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$$

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

۲ــ برای محاسبهٔ، $tg5x$ بسط زیر را درنظر می‌گیریم که در آن t نمادtgاست.

$$(1+t)^5 = 1 + 5t + 10t^2 + 10t^3 + 5t^4 + t^5 \qquad (۲)$$

$tg5x$ برابر کسری است که جملات فرد t بسط (۲) صورت و جملات زوج t بسط مزبور مخرج کسر است و علامت جملات در صورت و مخرج به ترتیب یک در میان مثبت و منفی می‌باشد، بدین ترتیب بسط $tg5x$ به صورت زیر است:

$$tg5x = \frac{5tgx - 10tg^3 x + tg^5 x}{1 - 10tg^2 x + 5\,tg^4 x}$$

تمرین ــ توابع مثلثاتی a ۳ را با استفاده از مطالب فوق بنویسید.

۶.۶ ــ روابط مجموع یا تفاضل درتابع‌های معکوس (Arc ها)

۱ــ الف $\quad 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$

$$\text{Arc Sin}x + \text{Arc Sin}y = \text{Arc Sin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

مثال:

$$\text{Arc Sin}\frac{8}{17} + \text{Arc Sin}\frac{3}{5} = \text{Arc Sin}\frac{77}{85}$$

ب: $\quad x^2 + y^2 \geqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant x, y \leqslant 1$

$$\text{ArcSin}x + \text{ArcSin}y = \pi - \text{ArcSin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

مثال:

$$\text{Arc Sin}\frac{12}{13} + \text{Arc Sin}\frac{4}{5} = \pi - \text{Arc Sin}\frac{56}{65}$$

پ: $\quad 0 \leqslant x \ , \ y \leqslant 1$

$$\text{Arc Sin}x - \text{Arc Sin}y = \text{ArcSin}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$

مثال ۱:

$$\text{Arc Sin}\,\frac{4}{5} - \text{Arc Sin}\,\frac{5}{13} = \text{Arc Sin}\,\frac{33}{65}$$

مثال ۲:

$$\text{Arc Sin}\,\frac{3}{5} - \text{Arc Sin}\,\frac{15}{17} = \text{Arc Sin}\,\frac{-36}{85} = -\text{Arc Sin}\,\frac{36}{85}$$

ت:

$$0 \leqslant x\,,y \leqslant 1$$

$$\text{Arc Cos}\,x + \text{Arc Cos}\,y = \text{Arc Cos}\left[\,xy - \sqrt{(1-x^2).(1-y^2)}\,\right]$$

مثال ۱:

$$\text{Arc Cos}\,\frac{12}{13} + \text{Arc Cos}\,\frac{4}{5} = \text{Arc Cos}\,\frac{33}{65}$$

مثال ۲:

$$\text{Arc Cos}\,\frac{8}{17} + \text{Arc Cos}\,\frac{5}{13} = \text{ArcCos}\left(\frac{-140}{221}\right) = \pi - \text{Arc Cos}\,\frac{140}{221}$$

ث:

$$0 \leqslant x < y \leqslant 1$$

$$\text{Arc Cos}\,x - \text{Arc Cos}\,y = \text{Arc Cos}\left[\,x.y + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\,\right]$$

مثال ۱:

$$\text{Arc Cos}\,\frac{3}{5} - \text{Arc Cos}\,\frac{4}{5} = \text{Arc Cos}\,\frac{24}{25}$$

ج:

$$0 \leqslant y < x \leqslant 1$$

$$\text{Arc Cos}\,x - \text{Arc Cos}\,y = -\text{ArcCos}\left[\,xy + \sqrt{(1-x^2).(1-y^2)}\,\right]$$

مثال:

$$\text{Arc Cos}\,\frac{15}{17} - \text{Arc Cos}\,\frac{8}{17} = -\text{ArcCos}\,\frac{240}{289}$$

۲ـ الف:

$$0 \leqslant x.y < 1$$

$$\text{Arc tg}\,x + \text{Arc tg}\,y = \text{Arc tg}\,\frac{x+y}{1-xy}$$

مثال:

$$\text{Arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{Arc tg}\,\frac{1}{3} = \text{Arc tg}\,1 = \frac{\pi}{4}$$

ب:

$$x\,,y > 0\,,\quad x.y > 1$$

$$\text{Arc tg}\,x + \text{Arc tg}\,y = \pi + \text{Arc tg}\,\frac{x+y}{1-xy}$$

مثال:

$$\text{Arc tg}\,2 + \text{Arc tg}\,3 = \pi + \text{Arc tg}\,(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

پ:

$$\text{Arc tg}\,x - \text{Arc tg}\,y = \text{Arc tg}\,\frac{x-y}{1+xy}\,,\quad x\,,y \geqslant 0$$

مثال:

$$\text{Arc tg}3 - \text{Arc tg}\,\frac{1}{2} = \text{Arc tg}\,\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}} = \text{Arc tg}\,1 = \frac{\pi}{4}$$

ت: $x, y > 0$

$$\text{Arc Cotg}x + \text{Arc Cotg}y = \text{Arc Cotg}\,\frac{xy-1}{y+x}$$

مثال:

$$\text{Arc Cotg}3 + \text{Arc Cotg}2 = \text{Arc Cotg}1 = \frac{\pi}{4}$$

ث: $0 < x < y$

$$\text{Arc Cotg}x - \text{Arc Cotg}y = \text{Arc Cotg}\,\frac{xy+1}{y-x}$$

مثال:

$$\text{Arc Cotg}\,\frac{3}{4} - \text{Arc Cotg}\,\frac{4}{3} = \text{Arc Cotg}\,\frac{24}{7}$$

ج: $0 < y < x$

$$\text{Arc Cotg}x - \text{Arc Cotg}y = \text{Arc Cotg}\,\frac{xy+1}{y-x} - \pi$$

مثال:

$$\text{Arc Cotg}\,\frac{15}{8} - \text{Arc Cotg}\,\frac{8}{15} = \text{Arc Cotg}\,\frac{-240}{161} - \pi$$

۳ـ الف: $0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$2\,\text{Arc Sin}x = \text{Arc Sin}\,(2x\sqrt{1-x^2})$$

مثال:

$$2\,\text{Arc Sin}\,\frac{1}{2} = \text{Arc Sin}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

ب: $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant 1$

$$2\,\text{Arc Sin}x = \pi - \text{Arc Sin}\,(2x\sqrt{1-x^2})$$

مثال:

$$2\,\text{Arc Sin}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \text{Arc Sin}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

پ: $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$2\,\text{Arc Cos}x = \text{Arc Cos}\,(2x^2-1)$$

مثال:

$$2\ \text{Arc Cos}\ \frac{1}{2} = \text{Arc Cos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

ت: $0 \leqslant x < 1$

$$2\ \text{Arc tg}x = \text{Arc tg}\ \frac{2x}{1-x^2}$$

مثال:

$$2\ \text{Arc tg}\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{Arc tg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

ث: $x > 1$

$$2\ \text{Arc tg}x = \text{Arc tg}\ \frac{2x}{1-x^2} + \pi$$

مثال:

$$3\ \text{Arc tg}\ \frac{1}{2} + 2\text{Arc tg}\ \frac{1}{3} = \text{Arc tg}\ \frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{8}}{1-\frac{3}{4}} + \text{Arc tg}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} =$$

$$\text{Arc tg}\ \frac{11}{2} + \text{Arc tg}\ \frac{3}{4} = \pi + \text{Arc tg}(-2) = \pi - \text{Arc tg}2$$

ج. $x > 0$

$$2\ \text{Arc Cotg}x = \text{Arc Cotg}\ \frac{x^2-1}{2x}$$

یادآوری:

$$x = 1 \Rightarrow \text{Arc tg}x = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow 2\text{Arc tg}x = \frac{\pi}{2} \qquad (I)$$

$$x = 0 \Rightarrow \text{Arc Cotg}x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow 2\text{Arc Cotg}x = \pi \qquad (II)$$

تبصره(۱) اگر x یا y یا هر دو منفی باشند باتوجه به روابط ۳۰۵ می‌توان آنها را مثبت نموده سپس از روابط فوق استفاده کرد.

تبصره(۲) در بررسی $3\ \text{Arc Sin}x$; $3\text{Arc Cos}x$; $3\ \text{Arc tg}x$, $3\text{ArcCotg}x$ باتوجه و رعایت حدود هریک‌از آنها می‌توان از دستورات ۳a بهره گرفت.

مسائل :

۵۶ ــ در فاصله $[-\pi$ و $\pi]$ حدود x را چنان معین کنید که داشته باشیم

$$\cos x \cos 2x \geqslant \sin x \sin 2x$$

۵۷ ــ $tg(a-b) = \frac{1}{3}$ و $tg(a+b) = 2$ باشد مطلوب است تعیین $tg2a$ و $tg2b$

۵۸ ــ
$$\begin{cases} tg(\pi-\alpha)+Cotg(\frac{3\pi}{2}+\alpha)+Sin(2\pi-\alpha)+Cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=2x-4 \\ tg(\pi+\alpha)+Cotg(\frac{\pi}{2}+\alpha)+tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=x+2 \end{cases}$$

۵۹ ــ اگر کمان α حاده باشد ، از روابط زیر مقدار x را معین کنید .

$$\begin{cases} Cotg(k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)-4x=tg(k\pi+\frac{\pi}{4}) \\ Sin(3k_1\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)+\sqrt{x+Cos\frac{\pi}{3}}=0 \end{cases} \quad ,(k\ ,k_1 \in z)$$

۶۰ ــ دوره تناوب تابع های زیر را تعیین کنید .

۱ــ $f(x)=2tg\frac{x}{2}+3tg\frac{x}{3}$

۲ــ $f(x)=Sin^2\frac{\pi}{3}x+Sin\pi x$

۳ــ $f(x)=Cos(Sinx)+Sin(Cosx)$

۴ــ $f(x)=|Sinx|+|Cosx|$

۵ــ $f(x)=|Sinx|-|Cosx|$

۶ــ $f(x)=|Cosx \pm Sinx|$

۷ــ $f(x)=Cotg2x-tg2x$

۶۱ــ ثابت کنید

$$Sin7x\ tg3.5x+Cos7x=1$$

۶۲ــ اگر $y=2k\pi+\frac{\pi}{2}+x$, $z=2k'\pi+\frac{\pi}{2}-x$ باشد از رابطهٔ $Sin3y-Cos^2 3z=1$ کمان x را تعیین کنید .

۶۳ــ اگر کمانهای ، x و y حاده بوده و $\sqrt{2}\,Cosx\,Cosy=1$ باشد ثابت کنید $tg^2x=Cos2y$ و $tg^2y=Cos2x$ و در ضمن تحقیق کنید که

$$0<x\ ,\ y<\frac{\pi}{4}$$

۶۴ــ ثابت کنید

$$4\,Cos\frac{\pi}{5}\,Cos\frac{2\pi}{5}=1$$

۶۵ــ ثابت کنید

$$8\,Sin\frac{\pi}{14}\,Sin\frac{3\pi}{14}\,Sin\frac{5\pi}{14}=1$$

۶۶ـ اولا" حداقل و حداکثر عبارت $P = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ را معین کنید ، ثانیا" مطلوب است تعیین حدود تغییرات (برد) ، M ،

$$M = a\sin x + b\cos x$$

۶۷ـ اگر کمان x حاده باشد ، ثابت کنید

$$\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$$

۶۸ـ اگر A ، B ، C زوایای مثلثی باشند ثابت کنید :

$$\sin A + \sin B + \sin C + \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C > 2\pi$$

اگر کمان x حاده و برحسب رادیان باشد ، ثابت کنید .

۶۹ـ $$x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x$$

۷۰ـ $$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$$

۷۱ـ اولا" ثابت کنید $\cos 36^\circ > \operatorname{tg} 36^\circ$ ثانیا" مطلوب است تعیین حدود کمانهای حاده مانند α به قسمی که داشته باشیم $\cos\alpha \geqslant \operatorname{tg}\alpha$

۷۲ـ در مثلث حادالزاویه‌ای داریم

$$\cos C = \frac{1-z}{1+z}, \quad \cos B = \frac{1-y}{1+y}, \quad \cos A = \frac{1-x}{1+x}$$

$(0 < x, y, z < 1)$ ثابت کنید : $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$

۷۳ـ هرگاه ، α ، β ، کمانهای حاده بوده و $\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}\beta$ باشد ثابت کنید

$$\alpha - \beta \leqslant 30^\circ$$

۷۴ـ اگر $\operatorname{tg} x = a \operatorname{tg} y$ ، $a > 0$ باشد ثابت کنید

$$\operatorname{tg}^2(x-y) \leqslant \frac{(a-1)^2}{4a}$$

۷۵ـ اولا" درستی اتحاد :

$$\frac{\sin^2\varphi}{\cos 3\varphi} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi}\right)$$

را بررسی کنید ثانیا" مطلوب است محاسبهٔ :

$$S_n = \frac{\sin^2\varphi}{\cos 3\varphi} + \frac{\sin^2 3\varphi}{\cos 9\varphi} + \dots + \frac{\sin^2 3^{n-1}\varphi}{\cos 3^n\varphi}.$$

$$\varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

۷۶ـ حاصل عبارت زیر را بنویسید .

$$A = \sin\left[2\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\operatorname{Arctg}(-1) + \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arccotg}(-1)\right]$$

۷۷ـ حاصل عبارت زیر را بنویسید

$$\varphi = \text{Arc Sin Cos}\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \text{Arc Cos Cotg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \text{Arc tg tg}\left(\frac{7\pi}{8}\right) + \text{Arc Cotg Cotg}\left(\frac{-\pi}{8}\right)$$

۷۸ـ درستی روابط زیر را بررسی کنید.

۱ـ
$$\text{Arc Sin}\,x = \begin{cases} \text{Arc Cos}\sqrt{1-x^2} & \text{به‌ازای } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\text{Arc Cos}\sqrt{1-x^2} & \text{به‌ازای } -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

۲ـ
$$\text{Arc Cos}\,x = \begin{cases} \text{Arc Sin}\sqrt{1-x^2} & \text{به‌ازای } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi - \text{Arc Sin}\sqrt{1-x^2} & \text{به‌ازای } -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

۳ـ
$$\text{Arc tg}\,x = \begin{cases} \text{Arc Cotg}\,\frac{1}{x} & \text{به‌ازای } x > 0 \\ \text{Arc Cotg}\,\frac{1}{x} - \pi & \text{به‌ازای } x < 0 \end{cases}$$

۴ـ
$$\text{Arc Cotg}\,x = \begin{cases} \text{Arc tg}\,\frac{1}{x} & \text{به‌ازای } x > 0 \\ \pi + \text{Arc tg}\,\frac{1}{x} & \text{به‌ازای } x < 0 \end{cases}$$

۷۹ـ ثابت کنید

$$\text{Arc tg}\,x + \text{Arc tg}\,\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{اگر } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

(کنکور ۶۳)

۸۰ـ اگر a و $b \in N$ باشند از رابطهٔ زیر مقادیر a و b را به دست آورید.

$$\text{Arc tg}\,\frac{1}{3} + \text{Arc tg}\,\frac{1}{4} = \text{Arc tg}\,\frac{a}{b}$$

۸۱ـ اگر $f(x) = \text{Arc tg}\,\frac{1-x}{1+x}$ باشد، $g(x) = f(x) + f(-x)$ کدام است؟

۸۲ـ حاصل عبارات زیر را تعیین کنید.

۱ـ $\varphi = \frac{\pi}{4} + \text{Arc tg}2$ ۲ـ $\text{Arc tg tg}\,\varphi$

۸۳ـ باشرط $a > b > 0$ ثابت کنید

$$\text{Arc tg}a - \text{Arc tg}b < a - b$$

۸۴ـ اولا" درستی رابطهٔ ،

$$\text{Arc tg}\frac{1}{2n^2} = \text{Arctg}\frac{n}{n+1} - \text{Arctg}\frac{n-1}{n} \quad (n \in N)$$

را بررسی کنید ثانیا" با استفاده از رابطهٔ فوق یا به طریق دیگر درستی رابطهٔ زیر را بررسی کنید .

$$S_n = \text{Arc tg}\frac{1}{2} + \text{Arc tg}\frac{1}{8} + \ldots + \text{Arc tg}\frac{1}{2n^2} = \text{Arc tg}\frac{n}{n+1}$$

۸۵ـ اگر دوره تناوب تابع ، $y = \text{Sin}\frac{3x}{m}$ برابر 5π باشد m کدام است ؟

۱) $\frac{15}{4}$ ۲) $\frac{4}{15}$ ۳) $\frac{2}{15}$ ۴) $\frac{15}{2}$

۸۶ـ اگر $\text{Cotg}x - \text{tg}x = \frac{2}{3}$ باشد ، $\text{Cotg}\,2x$ برابر است با :

۱) ۳ ۲) ۳ـ

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۸۷ـ اگر $x - y = \frac{\pi}{2}$ باشد $\text{tg}x - \text{tg}y$ کدام است ؟

۱) $\text{Cotg}2x$ ۲) $2\text{Cotg}\,2y$

۳) $\frac{2}{\text{Sin}2x}$ ۴) $\frac{2}{\text{Sin}2y}$

۸۸ـ در مثلث ، ABC زاویه $A = 90^\circ$ ، حاصل عبارت $\text{tg}B + \text{tg}C$ کدام است ؟

۱) $\frac{1}{\text{Sin}\,2C}$ ۲) $\frac{2}{\text{Sin}2B}$

۳) $\frac{1}{\text{Cos}\,2C}$ ۴) $\frac{2}{\text{Cos}2B}$

۸۹ـ حاصل $\text{Cotg}2\,\text{Arc tg}\frac{3}{2}$ برابر است با :

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{5}{12}$

۳) $-\frac{5}{12}$ ۴) $\pi - \frac{5}{12}$

۹۰ـ حاصل عبارت $A = \frac{1 - x^2}{\text{Sin}^2(\text{ArcCos}x)}$ کدام است ؟

۱) x ۲) $1 - x$

۳) ۱ ۴) ۱ـ

۹۱ـ نمودار تابع $\text{Arc tg}x + \text{Arc tg}y = 45^\circ$ کدام است؟

۱) دایره ۲) منحنی هموگرافیک

۳) یک منحنی مثلثاتی ۴) دو خط راست

۹۲ـ اگر، $\text{Arc Cotg}x + \text{Arc Cotg}y + \text{Arc Cotg}z = 270^\circ$ باشد، $x+y+z$ برابر است با:

۱) $xy+yz+zx$ ۲) $x^2+y^2+z^2$

۳) xyz ۴) صفر

۹۳ـ اگر $\text{Arc tg}(1+x) + \text{Arc tg}(1-x) = \frac{\pi}{4}$ باشد، مقدار x کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) 2

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۹۴ـ اگر یکی از توابع اولیه $f(x)$ برابر $\text{Sin}^2\frac{x}{2}$ باشد مشتق تابع، $f(\text{Arc Sin}x)$ برابر است با:

۱) 1 ۲) -1

۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۹۵ـ اگر $f(x+\pi) = f(x) + \text{Sin}x$ بوده و به‌ازای، $f(x)=0,\ x\in[0,\pi]$ باشد به‌ازای $x\in[-\pi,0]$، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\text{Sin}x$ ۲) $-\text{Sin}x$

۳) صفر ۴) $-\pi+\text{Sin}x$

۹۶ـ اگر $\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}$ ، $f(x) = \pi\text{Cos}x$ باشد حاصل $y = \text{Arc Sin Sin}f(x)$ کدام است؟

۱) $-f(x)$ ۲) $f(x)$

۳) $-f(x)-\pi$ ۴) $f(x)-\pi$

۹۷ـ اگر، $f(x)=\text{Sin}x$ باشد حاصل $y = \text{Arctg}f(x)+\text{Arctg}[f(x+\pi)]$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$

۳) $f(x)+\pi$ ۴) صفر

۹۸- اگر $0< x<90^\circ$ باشد حاصل، $y = \text{Arc Cos}(\text{Sin}^2 x - \text{Cos}^2 x)$ کدام است؟

۱) $-\text{Cos}2x$ ۲) $\pi - 2x$

۳) $-2x$ ۴) $\text{Cos}2x$

۹۹- اگر $-\frac{4}{5} \leqslant x \leqslant \frac{4}{5}$ باشد حاصل

$y = \text{ArcSin}(\text{Sin}x^2) + \text{Arc Cos}(\text{Cos}x^2)$

کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{16}{25}$

۳) 1 ۴) $2x^2$

۱۰۰- اگر $x \geqslant 1$ باشد حاصل عبارت $2\text{Arctg}x + \text{ArcSin}\frac{2x}{1+x^2}$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$

۳) $\text{Arctg}\frac{4}{3}$ ۴) $\pi - \text{Arctg}\frac{4}{3}$

۱.۷ ـ تبدیل مجموع یاتفاضل دونسبت مثلثاتی به حاصل ضرب

۱- $\text{Sin}p + \text{Sin}q = 2\text{Sin}\frac{p+q}{2}\text{Cos}\frac{p-q}{2}$

مثال:

درستی تساوی، $\text{Sin}40^\circ + \text{Sin}20^\circ = \text{Sin}80^\circ$ را بررسی کنید.

حل:

$\text{Sin}40^\circ + \text{Sin}20^\circ = 2\text{Sin}30^\circ\text{Cos}10^\circ = \text{Sin}80^\circ$

۲- $\text{Sin}p - \text{Sin}q = 2\text{Sin}\frac{p-q}{2}\text{Cos}\frac{p+q}{2}$

مثال:

درستی تساوی $\text{Sin}70^\circ - \text{Sin}10^\circ = \text{Sin}50^\circ$

حل:

$\text{Sin}70^\circ - \text{Sin}10^\circ = 2\text{Sin}30^\circ\text{Cos}40^\circ = \text{Sin}50^\circ$

۳- $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

مثال:

مقدار عددی عبارت $\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$ را تعیین کنید

حل:

$$\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12} = 2\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} =$$
$$\times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۴- $\cos p - \cos q = 2\sin\frac{q+p}{2}\sin\frac{q-p}{2}$

مثال:

مقدار عددی عبارت $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$ را تعیین کنید

حل:

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = 2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10} = 2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10} \qquad (۱)$$

حال اگر صورت و مخرج رابطه (۱) را در $۲\cos\frac{\pi}{۱۰}$ ضرب کنیم داریم:

$$2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10} = \frac{2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10})} = \frac{1}{2}$$

۵- $tg p \pm tg q = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}$

مثال:

درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$tg\frac{3\pi}{10} + tg\frac{\pi}{5} = 2\sec\frac{\pi}{10}$$

۶- $\cot g p \pm \cot g q = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p \sin q}$

مثال:

عبارت $\cot g 2x - \cot g 3x$ را به صورت حاصل‌ضرب بنویسید.

حل:

$$\cot g 2x - \cot g 3x = \frac{\sin x}{\sin 2x \sin 3x} = \frac{1}{2\cos x \sin 3x}$$

۲.۷ ــ تبدیل حاصل ضرب دوتابع مثلثاتی به مجموع یاتفاضل

۱- $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) =$

$\sin(a+b) - \sin(b-a)$

مثال:

دوره تناوب تابع ، $y = 2\sin 3x \cos x$ را تعیین کنید .

حل:

$$y = \sin 4x + \sin 2x \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{2} \ , \ T_2 = \pi \Rightarrow T = \pi$$

۲ـ $2\cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$

مثال:

عبارت $p = 2\cos 81^\circ \cos 9^\circ$ را به صورت مجموع بنویسید .

حل:

$$p = \cos 90^\circ + \cos 72^\circ = \cos 72^\circ$$

۳ـ $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

مثال:

عبارت ، $2\sin\frac{3a}{2}\sin\frac{a}{2}$ را به صورت مجموع بنویسید .

حل:

$$2\sin\frac{3a}{2}\sin\frac{a}{2} = \cos a - \cos 2a$$

۱.۸ ـ معادلهٔ مثلثاتی: هرگاه دو عبارت مثلثاتی یک کمان به ازای بعضی از مقادیر آن کمان باهم برابر باشند ، تساوی آن دو عبارت را معادله و کمان‌هائی را که به ازای آنها تساوی برقرار است ریشه‌های معادله می‌گویند . مثلا " ، دو عبارت $\sin x + \cos x$, $\sqrt{2}\sin 2x$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ بایکدیگر برابرند پس تساوی

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 2x$$

یک معادلهٔ مثلثاتی بوده و $x = \frac{\pi}{4}$ یکی از ریشه‌های آن در فاصلهٔ $[0 \ 2\pi]$ است .

۲.۸ ـ حل معادلهٔ مثلثاتی: منظور از حل معادلهٔ مثلثاتی یافتن تمام ریشه‌های آن می‌باشد واضح است که کلیه ریشه‌های یک معادله را می‌توان در یک یا چند دسته خلاصه‌کرد . هر معادلهٔ مثلثاتی پس از انجام عملیات لازم به یکی از صورتهای زیر درمی‌آید .

الف) $\sin x = \sin\alpha$ (α کمان معلوم است)

ب) $\cos x = \cos\alpha$

پ) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha$ یا $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}\alpha$

۱ـ اگر معادله به صورت $\sin x = \sin\alpha$ باشد داریم :

$x = 2k\pi + \alpha$ یا $x = (2k+1)\pi - \alpha$, $(k \in z)$ زیرا می‌دانیم که اگر سینوسهای دو کمان باهم برابر باشند آن دو کمان برابر یا مکمل هستند . ریشه‌های فوق را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت :

$x - \alpha = 2k\pi$ یا $x + \alpha = (2k+1)\pi$ و درنتیجه به صورت زیر

نیز بیان کرد :

هرگاه سینوسهای دو کمان برابر باشند ، تفاضل آن دو کمان مضرب زوجی از π و یا مجموع آنها مضرب فردی از π است .

مثال:

$$\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}2x = \mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x \Rightarrow \mathrm{Sin}2x = \sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$\mathrm{Sin}2x = \mathrm{Sin}(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} 2x - (x + \frac{\pi}{4}) = 2k\pi \Rightarrow x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x + (x + \frac{\pi}{4}) = (2k+1)\pi \Rightarrow x_2 = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

جوابهای x_1 و x_2 را که می‌توان به صورت ، $x = \frac{۲K\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ نوشت جوابهای کلی معادله و جوابهای ، $\frac{\pi}{۴}$ ، $\frac{۲\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۴\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ جوابهای اختصاصی معادله درفاصله [۰ و ۲π] هستند به‌طوری که قبلا" گفته شد جوابهای $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ سه کمان مثلثاتی می‌باشند و جوابهای اختصاصی گویای این مطلب است .

۲ـ اگر معادله به صورت $\mathrm{Cos}x = \mathrm{Cos}\alpha$ باشد داریم : $x = 2k\pi \pm \alpha$

زیرا می‌دانیم که اگر کسینوسهای دوکمان باهم برابرباشند آن‌دوکمان برابر یاقرینه‌اند ریشه معادله را می‌توان به صورت $x \pm \alpha = 2k\pi$ نیز نوشته و چنین بیان کرد ، هرگاه کسینوسهای دو کمان برابر باشند مجموع یا تفاضل دو کمان مضرب زوجی از π است .

مثال:

مطلوب است تعیین ریشه‌های کلی و ریشه‌های اختصاصی واقع در فاصله [۰ و ۲π] معادله :

$$\mathrm{Cos}x + 3\mathrm{Cos}2x = -1$$

حل:

$$\mathrm{Cos}x + 3\mathrm{Cos}2x + 1 = 0 \Rightarrow 6\mathrm{Cos}^2x + \mathrm{Cos}x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{Cos}x_1 = \frac{1}{2} = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} ,$$

$$\mathrm{Cos}x_2 = \frac{-2}{3} = \mathrm{Cos}\,[\,\mathrm{ArcCos}\,\frac{-2}{3}\,] \Rightarrow$$

$$x_2 = 2k\pi \pm \mathrm{ArcCos}(\frac{-2}{3}) \Rightarrow x_2 = (2k+1)\pi - \mathrm{ArcCos}\,\frac{2}{3}$$

تبصره:

اگر معادله به صورت ، $\mathrm{Cos}x = -\mathrm{Cos}\alpha$ باشد ریشه‌های آن عبارت است از :

$$x = (2k+1)\pi - \alpha$$

۳ـ اگر معادله به صورت ، $\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}\alpha$ یا $\mathrm{Cotg}x = \mathrm{Cotg}\alpha$ باشد ریشه‌های آن عبارت است از : $x = k\pi + \alpha$

مثال:

مطلوب است حل معادلات زیر:

۱) $3tgx - tg(\frac{\pi}{4} - x) = 3$

۲) $Cotgx - tgx = 2Cotg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$

حل ۱:

$$3tgx - \frac{1 - tgx}{1 + tgx} = 3 \Rightarrow 3tg^2x + tgx - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$tgx_1 = 1,\ tgx_2 = \frac{-4}{3}$$

$$tgx_1 = 1 \Rightarrow x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4},\ tgx_2 = \frac{-4}{3} = tg\ \alpha \Rightarrow x_2 = k\pi - Arctg\ \frac{4}{3}$$

حل ۲:

$$Cotgx - tgx = 2Cotg2x = 2Cotg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow 2x = k\pi + (\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad , 2k \neq (3k' + 1), (k, k' \in z)$$

تبصره:

باتوجه به وجود، tgx و $Cotgx$ در معادله، در جوابهای به دست آمده جوابهائی که به صورت، $x = \frac{n\pi}{2}$ باشد قابل قبول نیست. بنابراین از جوابهای کلی کمانهائی که مضربی از $\frac{\pi}{2}$ هستند خارج کرد.

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \neq \frac{n\pi}{2} \Rightarrow 4k + 1 \neq 3n$$

$$n = 2k' \Rightarrow 2k + \frac{1}{2} \neq 3k'$$ (همواره برقرار است)

و

$$n = 2k' + 1 \Rightarrow 2k \neq 3k' + 1$$

۳.۸ــ حالات خاص: باتوجه‌به‌مطالب‌فوق، در حالت کلی معادلات مثلثاتی عموما" دارای دو دسته جواب هستند مگر در حالات خاص زیر:

۱ــ $Sinx = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $Sinx = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۲ــ $Cosx = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$, $Cosx = -1 \Rightarrow x = (2k + 1)\pi$

در حالات فوق معادله دارای یک ریشه مضاعف است زیرا:

$$1 \pm Sinx = Sin^2\frac{x}{2} + Cos^2\frac{x}{2} \pm 2Sin\frac{x}{2}Cos\frac{x}{2} = (Sin\frac{x}{2} \pm Cos\frac{x}{2})^2$$

و $1 - Cosx = 2Sin^2\frac{x}{2}$ و

$$1 + Cosx = 2Cos^2\frac{x}{2}$$

۳- $\mathrm{Cos}x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Sin}x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

در حالات فوق دو دسته جواب معادله در هم ادغام شده‌اند.

۴.۸ ـ معادلات کلاسیک: در حالت کلی معادلات مثلثاتی راه‌حل مشخصی ندارند مگر آنکه آن معادلات صورت خاصی داشته باشند، این نوع معادله‌ها به معادلات کلاسیک موسوم‌اند. رایجترین معادلات کلاسیک عبارتنداز:

۱ـ معادلات کلاسیک نوع اول: معادله‌ای که به صورت، $a\mathrm{Sin}x + b\mathrm{Cos}x = C$ ، $(a, b \neq 0)$، است به معادله کلاسیک نوع‌اول موسوم می‌باشد و برای حل این نوع‌معادله دوطریقه پیشنهاد شده است.

الف ـ به کمک روابط

$$\mathrm{Cos}x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}} , \quad \mathrm{Sin}x = \frac{2\mathrm{tg} \frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$(c + b)\mathrm{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + c - b = 0$$

که با شرط، $a^2 + b^2 \geqslant c^2 \Rightarrow \Delta \geqslant 0$ به آسانی قابل حل است.

مثال:

معادلهٔ $3\mathrm{Sin}x - 2\mathrm{Cos}x = 3$ را حل کرده، جوابهای کلی و جوابهای اختصاصی واقع در فاصلهٔ $[0 , 2\pi]$ آن را تعیین کنید.

حل:

$$(3-2)\mathrm{tg}^2 \frac{x}{2} - 6\mathrm{tg} \frac{x}{2} + (3 + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}^2 \frac{x}{2} - 6\mathrm{tg} \frac{x}{2} + 5 = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1 \qquad \mathrm{tg} \frac{x}{2} = 5$$

$$\mathrm{tg} \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 5 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \mathrm{Arctg}5 \Rightarrow x = 2k\pi + 2\mathrm{Arctg}5 =$$

$$(2k + 1)\pi - \mathrm{Arctg} \frac{5}{12}$$

بنابراین جوابهای کلی معادله عبارتنداز:

$x = (2k + 1)\pi - \mathrm{Arctg} \frac{5}{12}$ یا $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

و جوابهای اختصاصی در فاصلهٔ $[0 , 2\pi]$ عبارتنداز: $\frac{\pi}{2}$ و $\pi - \mathrm{Arctg}\frac{5}{12}$

یادآوری:

$$5 > \sqrt{3} \Rightarrow \mathrm{Arctg}5 > \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\mathrm{Arctg}5 > \frac{2\pi}{3} ,$$

$$2\mathrm{Arctg}5 = \mathrm{Arctg}\frac{10}{1-25} + \pi = \pi - \mathrm{Arctg}\frac{5}{12}$$

تبصره:

اگر گمان $x=(2k+1)\pi$ در معادلهٔ $a\mathrm{Sin}x + b\mathrm{Cos}x = c$ صدق کند.
$\mathrm{Sin}x = 0$ و $\mathrm{Cos}x = -1$ درنتیجه $c = -b$ است و در ازای این ریشه، $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ تعریف نشده پس نباید از فرمولهای $\mathrm{Sin}x$ و $\mathrm{Cos}x$ برحسب $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ استفاده کرد در این حالت برای حل معادله به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$C = -b \Rightarrow a\mathrm{Sin}x = c(1+\mathrm{Cos}x) \Rightarrow 2a\mathrm{Sin}\frac{x}{2}\mathrm{Cos}\frac{x}{2} = 2C\,\mathrm{Cos}^2\frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Cos}\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\pi \text{ یا } \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow$$
$$x = 2k\pi + 2\mathrm{Arctg}\frac{c}{a}$$

ب:

$$a\mathrm{Sin}x + b\mathrm{Cos}x = c \Rightarrow \mathrm{Sin}x + \frac{b}{a}\mathrm{Cos}x = \frac{c}{a}$$

با فرض $\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ داریم:

$$\mathrm{Sin}x + \mathrm{tg}\varphi\,.\mathrm{Cos}x = \frac{c}{a} \Rightarrow \mathrm{Sin}(x+\varphi) = \frac{c}{a}\mathrm{Cos}\varphi$$

اگر $\left|\frac{c}{a}\mathrm{Cos}\varphi\right| \leqslant 1$ باشد، می‌توان نوشت $\mathrm{Sin}(x+\varphi) = \mathrm{Sin}\alpha$

یادآوری:

$$\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\varphi \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \mathrm{Cos}\varphi \Rightarrow$$

$$\left|\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1 \Rightarrow c^2 \leqslant a^2+b^2$$

مثال:

معادله $\mathrm{Sin}x + \sqrt{3}\,\mathrm{Cos}x = 1$ را حل کنید.

$$\mathrm{Sin}x + \sqrt{3}\,\mathrm{Cos}x = 1 \Rightarrow \mathrm{Sin}x + \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\mathrm{Cos}x = 1 \Rightarrow$$
$$\mathrm{Sin}(x+\frac{\pi}{3}) = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$
$$\mathrm{Sin}(x+\frac{\pi}{3}) = \mathrm{Sin}\frac{\pi}{6} \quad \begin{cases} x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۲ـ معادلهٔ کلاسیک نوع دوم ـ معادلهٔ به صورت، $a\mathrm{tg}x + b\,\mathrm{Cotg}x = c$ به معادله کلاسیک نوع دوم موسوم است و برای حل این معادله باتوجه به رابطه، $\mathrm{Cotg}x = \frac{1}{\mathrm{tg}x}$ داریم:

$$atgx + bCotgx = c \Rightarrow atg^2x - ctgx + b = 0 \qquad (۱$$

معادله (۱) با شرط $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow c^2 - 4ab \geqslant 0$ دارای جواب است.

مثال:

مطلوب است حل معادلهٔ، $tgx + \sqrt{3}\ Cotgx = 1 + \sqrt{3}$

حل:

$$tgx + \sqrt{3}\ Cotgx = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow tg^2x - (1+\sqrt{3})tgx + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

$$tgx = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \qquad tgx = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

تبصره:

برای حل معادلهٔ کلاسیک نوع دوم می‌توان آن را به یک معادلهٔ کلاسیک نوع اول تبدیل کرده سپس با استفاده از روش (ب) معادله را حل کرد.

مثال:

معادلهٔ، $tgx + (2-\sqrt{3})Cotgx = 3 - \sqrt{3}$ را حل کرده، جوابهای کلی و جوابهای اختصاصی واقع در فاصله، $[0, 2\pi]$ را تعیین کنید.

حل:

$$\frac{Sinx}{Cosx} + (2-\sqrt{3})\frac{Cosx}{Sinx} = 3 - \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$Sin^2x + (2-\sqrt{3})Cos^2x = (3-\sqrt{3})SinxCosx \Rightarrow$$

$$(1 - Cos2x) + (2-\sqrt{3})(1 + Cos2x) = (3-\sqrt{3})Sin2x \Rightarrow$$

$$(3-\sqrt{3})Sin2x + (\sqrt{3}-1)Cos2x = 3 - \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\sqrt{3}\,Sin2x + Cos2x = \sqrt{3} \Rightarrow Sin2x.Cotg\frac{\pi}{6} + Cos2x = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$Sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\ Sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow Sin(2x + \frac{\pi}{6}) = Sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

جوابهای کلی:

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ 2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

جوابهای اختصاصی $x = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}$

یادآوری:

باتوجه به جوابهای معادله، حل معادله با استفاده از معادلهٔ کلاسیک نوع اول ساده‌تراست‌زیرابا وجود جوابهائی‌مانند، $k\pi + \frac{\pi}{۱۲}$ حل مسئله با استفاده‌از توابع مثلثاتی x مشکلتر است.

۳ـ معادله کلاسیک نوع سوم ـ معادلهٔ به‌صورت زیر به معادلهٔ کلاسیک نوع سوم، موسوم است.

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

برای حل این نوع معادله می‌توان از روشهای زیر استفاده کرد.

الف ـ معادله را به نسبتهای مثلثاتی ۲ x تبدیل کرده سپس مانند معادله کلاسیک نوع اول حل کرد.

مثال:

مطلوب است حل معادله $5\sin^2 x - 2\cos^2 x - 3\sin x\cos x = 0$

حل:

$$5(1-\cos 2x) - 2(1+\cos 2x) - 3\sin 2x = 0 \Rightarrow$$

$$3\sin 2x + 7\cos 2x = 3 \Rightarrow \sin 2x + \frac{7}{3}\cos 2x = 1 \qquad (1)$$

با فرض $tg\varphi = \frac{۷}{۳}$ معادله (۱) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\sin(2x+\varphi) = \cos\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) \Rightarrow$$

$$2x + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} - Arctg\frac{7}{3}$$

$$2x + \varphi = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - \varphi) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

ب ـ با شرط $\cos x \neq 0$، طرفین معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$atg^2 x + btgx + c = d(1 + tg^2 x) \Rightarrow (a-d)tg^2 x + btgx + c - d = 0 \qquad (1)$$

معادلهٔ حاصل یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب tgx است.

مثال:

معادلهٔ $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$ را حل‌کنید.

حل:

$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ در معادله صدق نمی‌کند پس، $\cos x \neq 0$ است درنتیجه اگر طرفین معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$3tg^2 x - 2tgx - 1 = 0 \Rightarrow tgx_1 = 1 \ , \ tgx_2 = \frac{-1}{3}$$

$$tgx = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \ , \ tgx = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = k\pi - Arctg\frac{1}{3}$$

تبصره:

اگر، $\cos x = 0$ در معادلهٔ صدق کند می‌توان معادله بر $\sin^2 x$ تقسیم نمودویا به طریق دیگر مسئله حل کرد.

یادآوری:

اگر $a=d$ باشد، $Cosx=0$ و اگر $c=d$ باشد $Sinx=0$ در معادله صدق می‌کند.

مثال:

معادله $Sin^2x+3SinxCosx-2Cos^2x=1$ را حل کنید

حل:

$Cosx=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ در معادلهٔ صدق می‌کند پس معادله را نمی‌توان بر Cos^2x تقسیم کرد. برای حل آن از روش دیگر استفاده می‌کنیم.

$$1-Cos^2x+3SinxCosx-2Cos^2x=1 \Rightarrow 3Cos^2x-3CosxSinx=0$$

$$Cosx=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ Cosx=Sinx \Rightarrow tgx=1 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

۴ـ معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم ـ معادلهٔ به صورت

$$a(Sinx\pm Cosx)+bSinxCosx=c$$

به معادله کلاسیک نوع چهارم موسوم است. برای حل این معادله عبارت $Sinx\pm Cosx$ را برحسب $Sin(x\pm\frac{\pi}{4})$ نوشته سپس عبارت، $SinxCosx$ را برحسب $Sin(x\pm\frac{\pi}{4})$ محاسبه نموده در معادله قرار می‌دهیم.

مثال ۱:

معادلهٔ، $\sqrt{6}(Sinx+Cosx)-2Sin2x=2$ ، را حل کنید.

حل:

$$Sinx+Cosx=\sqrt{2}\,Sin(x+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$(Sinx+Cosx)^2=2Sin^2(x+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$1+Sin2x=2Sin^2(x+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow Sin2x=2Sin^2(x+\frac{\pi}{4})-1$$

باتوجه به روابط فوق معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2Sin^2(x+\frac{\pi}{4})-\sqrt{3}\,Sin(x+\frac{\pi}{4})=0 \Rightarrow Sin(x+\frac{\pi}{4})=0 \Rightarrow$$

$$x+\frac{\pi}{4}=k \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}\ ,\ Sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{2}=Sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{3} \text{ یا } \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{12} \text{ یا } \frac{5\pi}{12}$$

مثال ۲:

معادلهٔ، $\sqrt{2}(Cosx-Sinx)+2Sin2x=2$ را حل کنید.

حل:

$$Cosx-Sinx=\sqrt{2}\,Cos(x+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow Sin2x=1-2Cos^2(x+\frac{\pi}{4})$$

باتوجه به روابط فوق داریم:

$$2\cos^2(x+\frac{\pi}{4})-\cos(x+\frac{\pi}{4})=0 \Rightarrow$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ \cos(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$x+\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{12} \\ x=2k\pi-\frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

تبصره:

برای حل معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم می‌توان از روش دیگری نیز استفاده کرد، مثال زیر مطلب را روشن می‌کند.

مثال:

معادلهٔ، $\sin x-\cos x+\sin 2x=\sqrt{2}-1$ را حل کنید.

حل:

با فرض، $\sin x-\cos x=y$ ، $(|y|\leqslant\sqrt{2})$ ، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$y^2-y-(2-\sqrt{2})=0 \Rightarrow y=\sqrt{2} \Rightarrow \sin x-\cos x=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{4})=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$$

$$y=1-\sqrt{2} \Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\sin\varphi \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{4}+\varphi \\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}-\varphi \end{cases}$$

۳.۸ــ چند نکته در معادلهٔ کلاسیک نوع اول: اگر x' و x'' کوچکترین ریشه‌های معادله باشند داریم:

۱ــ شرط لازم و کافی برای آنکه x' ، x'' متمم باشند آن است که،

$$a=b\ ,\ \sqrt{2}\ |a|\geqslant|c|$$

۲ــ شرط لازم و کافی برای آنکه x' ، x'' مکمل باشند آن است که،

$$b=0\ ,\ |a|\geqslant|c|$$

۳ــ شرط لازم و کافی برای آنکه x' ، x'' قرینه باشند آن است که،

$$a=0\ ,\ |b|\geqslant|c|$$

تبصره:

اگر x' ، x'' در معادلهٔ کلاسیک نوع دوم متمم باشند باید،

$$a=b\ ,\ |c|\geqslant 2\ |a|$$

اگر x' و x'' در معادلهٔ کلاسیک نوع سوم متمم باشند باید،

$a = b \ , \ |c| \geqslant 2|a-d|$

۴.۸ ــ دستگاههای مثلثاتی ــ برای حل دستگاههای مثلثاتی چند مجهولی روش کلی وجود ندارد مگر آنکه دستگاهها دو مجهولی بوده و شکل خاصی داشته باشند ، این نوع دستگاهها به دستگاههای کلاسیک موسوم اند ، آنها عبارتنداز :

۱ــ
$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \operatorname{Sin}x \pm \operatorname{Sin}y = m \end{cases} \qquad (۱)$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \operatorname{Cos}x \pm \operatorname{Cos}y = m \end{cases} \qquad (۲)$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \operatorname{tg}x \pm \operatorname{tg}y = m \end{cases} \qquad (۳)$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \operatorname{Cotg}x \pm \operatorname{Cotg}y = m \end{cases} \qquad (۴)$$

برای حل این دستگاهها مجموع یا تفاضل نسبتهای مثلثاتی دو کمان را به حاصلضرب تبدیل نموده سپس باتوجه به معلوم بودن ، $x+y$ ، عبارت $x-y$ راحساب می‌کنیم و یا بالعکس ، تا دستگاه تبدیل به یک دستگاه جبری گردد .

مثال :

دستگاه دومجهولی $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} \\ \operatorname{Cotg}x + \operatorname{Cotg}y = 4 \end{cases}$ را حل کنید .

حل:

$$\operatorname{Cotg}x + \operatorname{Cotg}y = 4 \Rightarrow \frac{\operatorname{Sin}(x+y)}{\operatorname{Sin}x\operatorname{Sin}y} = 4 \Rightarrow$$

$$\frac{2\operatorname{Sin}(x+y)}{\operatorname{Cos}(x-y)-\operatorname{Cos}(x+y)} = 4 \Rightarrow$$

$\operatorname{Sin}(x+y)+2\operatorname{Cos}(x+y)=1$ ، بافرض $\operatorname{tg}\varphi = ۲$ داریم :

$$\operatorname{Sin}(x+y)+\operatorname{tg}\varphi.\operatorname{Cos}(x+y)=1 \Rightarrow$$

$$\operatorname{Sin}(x+y+\varphi)=\operatorname{Cos}\varphi=\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2}-\varphi) \Rightarrow$$

$$x+y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

و یا

$$x+y = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctg}2$$

از اینجا داریم :

$$\begin{cases} x+y=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ x-y=\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{5\pi}{12} \\ y=k\pi+\frac{\pi}{12} \end{cases}$$ و یا

$$\begin{cases} x+y=2k\pi+\frac{\pi}{2}-2\mathrm{Arctg}2 \\ x-y=\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{5\pi}{12}-\mathrm{Arctg}2 \\ y=k\pi+\frac{\pi}{12}-\mathrm{Arctg}2 \end{cases}$$

۲- (۱) $\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \mathrm{Sin}x\ ,\ \mathrm{Sin}y=n \end{cases}$

(۲) $\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \mathrm{Cos}x.\mathrm{Cos}y=n \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y=n \end{cases}$

(۴) $\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \mathrm{Cotg}x.\mathrm{Cotg}y=n \end{cases}$

برای حل این دستگاهها حاصل‌ضرب نسبتهای‌مثلثاتی را به‌مجموع تبدیل‌کرده سپس مانند حالت (۱) عمل می‌کنیم .

مثال :

دستگاه دومجهولی مقابل را حل کنید .

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{4} \\ \mathrm{Cos}\,\pi x.\mathrm{Cos}\,\pi y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

حل:

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{Cos}\,\pi(x-y)+\mathrm{Cos}\pi(x+y)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Cos}\,\pi(x-y)+\mathrm{Cos}\frac{\pi}{4}=\sqrt{2} \Rightarrow \mathrm{Cos}\pi(x-y)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\mathrm{Cos}\frac{\pi}{4}$$

$$x-y=2k\pm\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x-y=2k+\frac{1}{4} \\ x+y=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k+\frac{1}{8} \\ y=-k \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} x-y=2k-\frac{1}{4} \\ x+y=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k \\ y=-k+\frac{1}{4} \end{cases}$$

۳- (۱)
$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = p \end{cases}$$

(۲)
$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = p \end{cases}$$

(۳)
$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{tg x}{tg y} = p \end{cases}$$

(۴)
$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{cotg x}{cotg y} = p \end{cases}$$

برای حل این دستگاهها در کسر (معادله مثلثاتی) ترکیب و تفضیل در صورت و و مخرج انجام داده سپس صورت و مخرج‌کسر حاصل را به‌حاصلضرب‌نسبتهای‌مثلثاتی تبدیل نموده مانند حالات قبل عمل می‌کنیم .

مثال ۱:

دستگاه $\begin{cases} 2x - y = \dfrac{\pi}{3} \\ \sin 2x = 2\sin y \end{cases}$ را حل کنید

حل:

$$\frac{\sin 2x}{\sin y} = 2 \Rightarrow \frac{\sin 2x + \sin y}{\sin 2x - \sin y} = 3 \Rightarrow$$

$$tg\,\frac{2x+y}{2} \cdot cotg\,\frac{2x-y}{2} = 3 \Rightarrow$$

$$\sqrt{3} \cdot tg\,\frac{2x+y}{2} = 3 \Rightarrow tg\,\frac{2x+y}{2} = \sqrt{3} = tg\,\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2k\pi + \dfrac{2\pi}{3} \\ 2x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \\ y = k\pi + \dfrac{\pi}{6} \end{matrix}$$

مثال ۲:

دستگاه دومجهولی ، $\begin{cases} x + y = Arctg\,\dfrac{2a}{1-a^2}, (a < 1) \\ tg x\, tg y = a^2 \end{cases}$ را حل کنید .

حل:

$$tg x\, tg y = a^2 \Rightarrow \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = a^2 \Rightarrow \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{1+a^2}{1-a^2}$$

$$a < 1 \Rightarrow x + y = 2\,\mathrm{Arctg}\,a \;,\; \mathrm{Arctg}\,a = \varphi \Rightarrow x + y = 2\varphi \;,\; \mathrm{tg}\,\varphi = a \Rightarrow$$

$$\mathrm{Cos}(x+y) = \mathrm{Cos}\,2\varphi = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\varphi}{1 + \mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \Rightarrow \mathrm{Cos}(x-y) = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 2k\pi \\ x + y = 2\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \mathrm{Arctg}\,a \\ y = -k\pi + \mathrm{Arctg}\,a \end{cases}$$

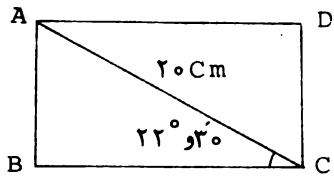
۱.۹ ــ روابط بین اجرای اصلی مثلث قائم الزاویه $(A = ۹۰)$

(۱)	$b = a\mathrm{Sin}B$	و	$c = a\,\mathrm{Sin}\,C$
(۲)	$b = a\mathrm{Cos}C$	و	$c = a\,\mathrm{Cos}\,B$
(۳)	$b = c\,\mathrm{tg}\,B$	و	$c = b\,\mathrm{tg}\,C$
(۴)	$b = c\mathrm{Cotg}C$	و	$c = b\mathrm{Cotg}B$

۲.۹ ــ حل مثلث قائم الزاویه ــ اگر از مثلث قائم‌الزاویه‌ای یک ضلع و یک زاویه حاده و یا دو ضلع معلوم باشد به کمک روابط فوق می‌توان سایر اجزای اصلی آن را محاسبه‌کرد.

مثال ۱:

مساحت مستطیل ABCD در شکل زیر را باتوجه به معلومات آن به دست آورید.



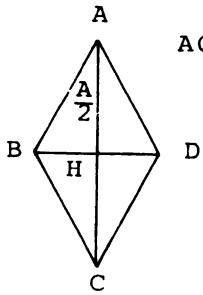
حل:

$$AB = AC.\mathrm{Sin}(22°, 30') \;,\; BC = AC\,.\,\mathrm{Cos}(22°, 30')$$

$$S = AB.BC \Rightarrow S = \overline{AC}^{\,2}\,\mathrm{Sin}(22°, 30')\mathrm{Cos}(22°, 30') \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2}\,\overline{AC}^{\,2}\,\mathrm{Sin}\,45° = 100\sqrt{2}$$

مثال ۲:



در لوزی شکل مقابل، $AC = 2(\sqrt{3} + 1)\,,\,AB = 2\sqrt{2}$ مطلوب است اندازه زوایا و مساحت لوزی.

حل:

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \cos 15^\circ \Rightarrow$$

$$, \hat{C} = \hat{A} = 30^\circ \quad , \hat{B} = 150^\circ = \hat{D}$$

$$BH = AB.\sin\frac{A}{2} \Rightarrow BH = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = \sqrt{3}-1$$

$$S = AC.BH \Rightarrow S = 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 4^{cm^2}$$

۳.۹ــ روابط بین اجزاء اصلی مثلث درحالت کلی:

۱ــ روابط بین اضلاع و سینوس زوایای مثلث . (R شعاع دایره محیطی مثلث)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow a = 2R\sin A, b = 2R\sin B \ ,$$

$$c = 2R\sin C$$

۲ــ روابط بین اضلاع و کسینوس زوایای مثلث

الف ــ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ب ــ $c = a\cos B + b\cos A, b = c\cos A + a\cos C$,

$a = b\cos C + c\cos B$

۳ــ روابط بین اضلاع و توابع مثلثاتی نصف زوایای مثلث (p ۲ محیط مثلث)

الف ــ $\sin^2\frac{c}{2} = \frac{(p-a)(p-b)}{ab}$, $\sin^2\frac{B}{2} = \frac{(p-c)(p-a)}{ca}$,

$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

ب ــ $\cos^2\frac{c}{2} = \frac{p(p-c)}{ab}$, $\cos^2\frac{B}{2} = \frac{p(p-b)}{ca}$,

$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{P(p-a)}{bc}$

پ ــ $tg^2\frac{c}{2} = \frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}$, $tg^2\frac{B}{2} = \frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}$,

$tg^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$

۴ــ محاسبه بعضی ار اجزاء مهم مثلث برحسب اضلاع و زوایای آن .

الف ــ اگر ارتفاعهای مثلث را به ترتیب ، h_a ، h_b و h_c فرض کنیم داریم :

$h_c = b\sin A = a\sin B$, $h_b = a\sin C = c\sin A$, (۱)

$h_a = c\sin B = b\sin C$

باتوجه به روابط سینوسها ، روابط فوق را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت :

$$h_c = \frac{c\sin A\sin B}{\sin C}\ ,\ h_b = \frac{b\sin C\sin A}{\sin B}\ , \qquad (۲)$$

$$h_a = \frac{a\sin B\sin C}{\sin A}$$

ب ــ اگر S مساحت مثلث باشد ، داریم :

$$S = \frac{1}{2}\ ab\sin C\ ,\ S = \frac{1}{2}\ bc\sin A\ ,\ S = \frac{1}{2}\ ca\sin B \qquad (۱)$$

باتوجه به رابطه (۲) ارتفاع روابط بالا را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت :

$$S = \frac{1}{2}\ ch_c = \frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}\ ,\ S = \frac{1}{2}\ bh_b = \frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B}, (۲)$$

$$S = \frac{1}{2}\ ah_a = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$$

۴.۹ ــ حل مثلث : به‌طوری که در کاربرد مثلثات گفته شد منظور از حل مثلث،تعیین اجزای اصلی مثلث به‌وسیله روابط و سه جزء معلوم آن است . و در ضمن می‌دانید که از سه جزء معلوم حداقل یکی باید طول باشد . درحالاتی که اجزای معلوم ، اجـزای اصلی مثلث باشد حل مثلث را کلاسیک می‌نامند . در این قسمت مقصود بررسی حالات کلاسیک حل مثلث است و آن حالات عبارتنداز :

۱ ــ معلومات: دوزاویه ویک ضلع

مثال:

از مثلثی ، $a = ۳\sqrt{۲}$ و $\hat{A} = ۱۰۵^\circ$ و $\hat{B} = ۴۵^\circ$ ، معلوم است مثلث را حل کنید .

حل:

مجهولات مثلث دو ضلع c و b و زاویه C است .

$\hat{C} = ۱۸۰ - (A+B) = ۳۰^\circ$ و باتوجه به روابط سینوسها داریم :

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} \Rightarrow b = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})\ ,$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} \Rightarrow C = 3(\sqrt{3} - 1)$$

یادآوری:

$$\sin A = \sin 105^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \cos 15^\circ$$

۲ ــ معلومات: دوضلع یک زاویه

مثال ۱:

از مثلثی ، $A = ۶۰^\circ$ و $b = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ و $c = \sqrt{۶} + \sqrt{۲}$ ،معلوم است ، مثلث‌راحل

کنید (دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلع)

حل:

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{\sin C+\sin B}{\sin C-\sin B}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\frac{C+B}{2}\operatorname{Cotg}\frac{C-B}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{120^\circ}{2}.\operatorname{Cotg}\frac{C-B}{2}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow C-B=90^\circ$$

$$C-B=90^\circ\ ,\ C+B=180-A=120\Rightarrow C=105^\circ\ ,B=15^\circ$$

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}\Rightarrow a=\frac{(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}}=۲\sqrt{۳}$$

یادآوری:

$$\sin 15^\circ=\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

تبصره:

برای حل مسئله در حالت فوق می‌توان از رابطهٔ

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

ضلع a و سپس از رابطهٔ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

مقادیر $\sin B$, $\sin C$ و از اینجا زوایای B و C را محاسبه کرد.

مثال ۲:

از مثلثی، $\hat{C}=۴۵^\circ$ و $c=۲$ و $b=\sqrt{۶}$ معلوم است مثلث را حل کنید.

(دو ضلع و زاویه مقابل به یکی از آن دو ضلع)

حل:

$$(1)\ \sin B=\frac{b\sin C}{c}\Rightarrow\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\begin{cases}B=60^\circ\Rightarrow A=75^\circ\\ B=120^\circ\Rightarrow A=15^\circ\end{cases}$$

و

$$(2)\ a=\frac{b\sin A}{\sin B}\Rightarrow\begin{cases}A=75^\circ\Rightarrow a=\sqrt{3}+1\\ A=15^\circ\Rightarrow a=\sqrt{3}-1\end{cases}$$

تبصره:

باتوجه به رابطه (۱) مسئله وقتی جواب دارد که

$\frac{b\sin C}{c}\leqslant 1\Rightarrow b\sin C\leqslant c$, اگر، $c>b\sin C$ مسئله دو جواب

و اگر $c = b\sin C$ ، مسئله یک جواب دارد .

۳ــ معلومات: سه ضلع

مثال ۱:

از مثلثی ، $a=\sqrt{۳}+۱$ ، $b=\sqrt{۳}+۳$ ، $c=۲\sqrt{۳}+۲$ معلوم است ، زوایای این مثلث را حساب کنید .

حل:

باتوجه به روابط اضلاع و توابع مثلثاتی نصف زوایا داریم :

$$\sin^2\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)}{ab}=\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,(1+\sqrt{3})^2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}=$$

$$\frac{1}{2}\Rightarrow \sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow C=90^\circ$$

و

$$\sin^2\frac{B}{2}=\frac{(p-c)(p-a)}{ac}=\frac{2+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B=60^\circ \quad A=180^\circ-150^\circ=30^\circ$$

مثال ۲:

در مثلثی ، $a=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ ، $b=۲\sqrt{۲}$ ، $c=۲\sqrt{۳}$ است زوایای مثلث را تعیین کنید .

حل:

بنا به رابطهٔ کسینوسها داریم :

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow \cos A=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\Rightarrow$$

$$A=75^\circ$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2bc}\Rightarrow \cos B=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow B=45^\circ$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\Rightarrow \cos C=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2}\Rightarrow C=60^\circ$$

مسائل

۱۰۱ــ به‌ازای چه مقادیری از کمان φ معادلهٔ زیر جواب دارد؟

$$4tg\frac{\varphi}{2}\,Sinx + 4tg^2\frac{\varphi}{2}\,Cosx = 5tg^2\frac{\varphi}{2} + 1$$

۱۰۲ــ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $aSinx + a^2\,Cosx = -1$ باشد ثابت کنید که:

$$(tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2})^2 + 1 - tg^2\frac{\alpha}{2}\,tg^2\frac{\beta}{2} = 0$$

۱۰۳ــ از رابطهٔ $Cotgx = \frac{Cos20^\circ Cos30^\circ}{Cos^2 10^\circ}$، کمان حاده x را برحسب درجه به‌دست آورید. کنکور ۶۱

معادلات زیر را حل کنید:

۱۰۴ــ
$$\frac{tg(a-x)}{Cos^2x} = \frac{tgx}{Cos^2(a-x)}$$

۱۰۵ــ $Cos(3x+\alpha).Cos(3x-\alpha)+Cos(5x+\alpha)Cos(5x-\alpha)=Cos2\alpha$

۱۰۶ــ $Cos^2x + Cos^2 11^\circ = \frac{3}{4} + Cos11^\circ Cosx$

۱۰۷ــ $4CosxCos2xCos3x = 1$

۱۰۸ــ $Sin^2x + Sin^2 2x - Sin^2 3x - Sin^2 4x = 0$

۱۰۹ــ $2CosxCos(2x-\varphi) = (1+Cos2x)Cos(x-\varphi)$

۱۱۰ــ $Sin(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}) = 2Sin(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2})$

۱۱۱ــ $(Sin^2x - 2)^3 + (Cos2x + Sin^2x)^3 + 1 = 0$

۱۱۲ــ اولاً معادله، $tg2x(1+tg6xtg5x) - (2m-1)(tg6x - tg5x) = 0$ را حل کنید.

ثانیاً m را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله، $x = \frac{\pi}{6}$ باشد.

۱۱۳ــ از معادلهٔ $(3Sinx + \sqrt{3}\,Cosx + 5y)^2 = 37(1+y^2)$ مقادیر x و y را به دست آورید. $x, y \in R$

۱۱۴ــ اولاً اگر $tg\alpha = \frac{3}{7}$ و $tg\beta = 2\sqrt{7}$ باشد، نسبتهای مثلثاتی α و β راتعیین‌کنید.

ثانیاً جوابهای معادلهٔ،

$$7Sin7x - 3Cos7x = 2\sqrt{14}\,Cos3x + \sqrt{2}\,Sin3x$$

را برحسب α و β به دست آورید.

۱۱۵ـ معادلهٔ مثلثاتی ، $\sin^2(2x-\frac{\pi}{8})-2p\cos(\frac{5\pi}{8}-2x)+q=0$ را در نظر می‌گیریم ،ثابت‌کنید هرگاه تفاضل دوریشه این معادله برابر $\frac{\pi}{4}$ باشدداریم

$$4p^2=2q+1$$

۱۱۶ـ ثابت کنید در هر مثلث

$$\frac{p-a}{p-b}=\cot g\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}\ ,\ \frac{p}{p-a}=\cot g\frac{B}{2}.\cot g\frac{C}{2}$$

برقرار است (p نصف محیط مثلث)

۱۱۷ـ در مثلثی رابطهٔ $h_c-h_b=a\sqrt{2}\sin\frac{B-C}{2}$ برقرار است نوع مثلث را مشخص کنید .

۱۱۸ـ در مثلثی ، $B-C=\frac{\pi}{3}$ و بین ارتفاعات روئس B و C رابطهٔ $\frac{h_c}{h_b}=2+\sqrt{3}$ برقرار است زوایای مثلث را تعیین کنید .

ثابت کنید در هر مثلث روابط زیر برقرار است .

۱۱۹ـ $a\cos 2B+2b\cos A\cos B=c\cos B-b\cos C$

۱۲۰ـ $M=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$

۱۲۱ـ $N=\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$

نوع مثلثی را مشخص کنید که در آن روابط زیر برقرار است .

۱۲۲ـ $\frac{tgA}{tgB}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$

۱۲۳ـ $M=\frac{\cot gA}{tgB+tgC-tgA}=\frac{\cot gB}{tgC+tgA-tgB}=\frac{\cot gC}{tgA+tgB-tgC}$

۱۲۴ـ در مثلث قائم‌الزاویه ،ABC ، $(A=90^\circ)$ زاویه‌ای که میانه ، BM ، با وتر BC می‌سازد φ است ، ثابت کنید :

$$tg\varphi=\frac{tgB}{2+tg^2B}$$

۱۲۵ـ در مثلثی ، $b-a=nc$ است ، ثابت کنید ، $\cos(A+\frac{C}{2})=n\cos\frac{C}{2}$

۱۲۶ـ در مثلث ABC اگر 'A وسط BC و O مرکز دایره محاطی باشد ثابت کنید :

$$2\cot gOA'B=\cot g\frac{C}{2}-\cot g\frac{B}{2}$$

۱۲۷ـ ثابت کنید اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ،یکی از زوایای حاده برابر 15° باشدارتفاع وارد بر وتر آن مثلث $\frac{1}{4}$ وتر است .

۱۲۸ـ در مثلث غیرقائم‌الزاویه‌ای از رأس A عمودهائی بر اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم

اگر این عمودها ضلع BC یا امتداد آن را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند ثابت کنید:

$MN = a\,tgB\,tgC$

۱۲۹ــ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A = 90^\circ$) ضلع AC سه برابر AB است. روی ضلع AC نقطه M را طوری اختیار می‌کنیم که $CM = AB$ باشد، ثابت کنید مجموع دو زاویه BMA و BCA برابر 45° است.

۱۳۰ــ اگر سطح جانبی مخروطی با حجم ثابت مینیمم باشد، نسبت ارتفاع آن بر شعاع قاعده‌اش چقدر است؟

۱۳۱ــ به میله‌ای به ارتفاع a پرچمی به پهنای b نصب شده است. در چه نقطه از پای پرچم باید قرار گرفت، تا زاویه دید پرچم ماکزیمم باشد.

۱۳۲ــ در یک مثلث متساوی‌الساقین به رأس A و قاعده a و ساق b. اگر $\cos A = \frac{a^2}{b^2}$ باشد، $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۲) $\sqrt{3}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

۱۳۳ــ اگر، $x-y = \frac{\pi}{3}$ و $\sin x - \sin y = \frac{1}{2}$ باشد، $\cos(x+y)$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۴ــ معادلهٔ $\sin^2 x \cos x = 1$، در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ چندجواب دارد؟

۱) یک ۲) دو

۳) چهار ۴) هیچ

۱۳۵ــ اگر عبارت $2x^2 - 2x\sin\varphi - 1$ بر عبارت $x - \cos\varphi$ بخش‌پذیر باشد مقدار φ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۱۳۶ــ در مثلث ABC، $tgA = \frac{1}{4}$ و $tgB = \frac{3}{5}$ است. زاویه C کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۳۷ــ معادلهٔ $2\sin x - \frac{1}{\sin x} = 1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ چندجواب دارد؟

۱) سه ۲) دو

۳) یک ۴) هیچ

۱۳۸ـ اگر در مثلث ABC ، $B = 60^\circ$ و $tgA + tgC = 2tgB$ باشد، $Cos(A - C)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۹ـ معادله $Sin^5x + Sin^3x - 1 = 0$ در فاصلهٔ $[0 , \frac{\pi}{2}]$ چند جواب دارد؟

۱) یک ۲) دو

۳) بیش از دو ۴) هیچ

۱۴۰ـ برای آنکه دستگاه $\begin{cases} \sqrt{2}\, Sinx = Siny \\ b\, Cosx = Cosy \end{cases}$ دارای جواب باشد لازم است داشته باشیم:

۱) $b > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $b > 1$

۳) $b \leqslant \sqrt{2}$ ۴) $b \leqslant 1$

۱۴۱ـ اگر در مثلث ABC، $b = 2c$ و $B - C = 90^\circ$ باشد، tgA کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۴۲ـ حاصل عبارت $tg(157^\circ 30') - (Cotg(157^\circ 30'))$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۲ـ

۳) $2\sqrt{2}$ ۴) بدون جدول قابل محاسبه نیست

۱۴۳ـ اگر $Sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{2}{3}$ باشد، $Sin2x$ برابر است با:

۱) $\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{4}{9}$

۳) $-\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۱۴۴ـ اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد همواره:

۱) $Sin2x > Cosx$ ۲) $Cos2x > Sinx$

۳) $tgx > Cotg2x$ ۴) $Cotgx > Cotg2x$

۱۴۵ـ نامعادلهٔ $ArcSinx < ArcSinx^2$ وقتی جواب دارد که:

۱) $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ۲) $-1 \leqslant x < 0$

۳) $-1 < x < 0$ ۴) $0 < x \leqslant 1$

۱۴۶ـ معادلهٔ $6\sin x - 8\sin^2 x = m$ وقتی جواب دارد که:

۱) $-1 \leqslant m \leqslant 1$ ۲) $-1 < m < 1$

۳) $-2 \leqslant m \leqslant 2$ ۴) $-2 < m < 2$

۱۴۷ـ معادله $2\operatorname{Arctg} x = 5$ (رادیان) دارای چند جواب است؟

۱) فقط یک جواب ۲) بی‌شمار

۳) هیچ ۴) دو جواب

۱۴۸ـ دستگاه $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{Cotg} y = a \end{cases}$ وقتی جواب دارد که:

۱) $a < 0$ ۲) $a > 1$

۳) کلمه مقادیر a ۴) $a \leqslant 1$

۱۴۹ـ معادله $\cos 3x - (m-1)\cos x = 0$ وقتی جواب دارد که:

۱) $-1 < m < 2$ ۲) $-2 < m < 1$

۳) $0 < m < 1$ ۴) به‌ازای کلیه مقادیر m

۱۵۰ـ دستگاه $\begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases}$ وقتی که $0 < x, y < \pi$، چندجواب‌دارند؟

۱) یک ۲) دو

۳) سه ۴) بی‌شمار

راهنمای مسائل

۱- $۶^\circ \sim \frac{\pi R}{۳۰}$ ، $۱۵^\circ \sim \frac{\pi R}{۱۲}$ ، $۴۰^\circ \sim \frac{۲\pi R}{۹}$ ، $۱۷۵^\circ \sim \frac{۳۵\pi R}{۳۶}$

(نماد ، ~ را بخوانید معادل است) $63\pi^\circ \sim \frac{(7\pi^2)R}{20}$

۲- $\frac{\pi}{12} \sim 15^\circ \sim \frac{50^G}{3}$, $\frac{2\pi}{9} \sim 40^\circ \sim \frac{400^G}{9}$

$\frac{3\pi}{5} \sim 108^\circ \sim 120^G$, $\frac{40\pi}{27} \sim (266^\circ, 20') \sim \frac{8000^G}{27}$

$\frac{5}{6} \sim (\frac{150}{\pi})^\circ \sim (\frac{500}{3\pi})^G$, $1 \sim (\frac{180}{\pi})^\circ \sim (\frac{200}{\pi})^G$

یادآوری:

هر رادیان معادل "۲۹ و '۱۵ و °۵۷ است .

۳- در هر ساعت عقربه ساعت‌شمار ۳۰ درجه و عقربه دقیقه‌شمار ۳۶۰ درجه طی می‌کند. بنابراین زاویه دو عقربه در ساعت یک ربع بعدازظهر عبارت است‌از:

$۱۵ \times \frac{۳۶۰}{۶۰} - ۱۵ \times \frac{۳۰}{۶۰} = ۸۲^\circ$ و ۳۰

۴- $24^\circ \sim (\frac{2\pi}{15})^R$, $C = 25^{cm} \times \frac{2\pi}{15} = (\frac{10\pi}{3})^{cm}$

۵- $B^\circ + C^\circ = 90^\circ \Rightarrow x + 0.9y = 90,\ x - y = 52 \Rightarrow$

$x = 72 \Rightarrow B = 72^\circ$, $y = 20 \Rightarrow C = 20^G \Rightarrow$

$B = (\frac{2\pi}{5})^R$, $C = (\frac{\pi}{10})^R$

۶- $3\beta = 250^G \Rightarrow \beta = (\frac{5\pi}{12})^R$

۷- اگر طول کمان طی شده را C فرض کنیم داریم :

$C = \frac{1}{12} \times 2 \times 135 \times \pi = \frac{45\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{45\pi}{2} : 135 = \frac{\pi^R}{6} \sim \frac{100^G}{3}$

۸- می‌دانیم که فاصله زاویه‌ای دو ساعت متوالی ۳۰ درجه است پس:

$\omega = ۳ \times ۳۰ - ۰/۵ \times ۳۰ = ۹۰ - ۱۵ = ۷۵^\circ \sim \frac{۵\pi}{۱۲}^R$

یادآوری:

اگر مبداء حرکت عقربه‌ها را ساعت ۱۲ فرض کنیم برای محاسبه زاویه بین دو عقربه در ساعت c و دقیقه d می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد :

$\omega = ۱\, d \times ۶^\circ - (c \times ۳۰^\circ + d \times ۰/۵^\circ)$

در مسئله بالا ۳ = c و ۳۰ = d پس:

$\omega = ۳۰ \times ۶^\circ - (۳ \times ۳۰^\circ + ۳ \times ۰/۵^\circ) = ۷۵^\circ$

۹ـ اگر زوایای α و β و γ برحسب رادیان باشند داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{15}\quad,\quad \beta+\gamma=\frac{\pi}{20}\quad,\quad \gamma+\alpha=\frac{\pi}{12}$$

از حل دستگاه سه‌مجهولی فوق نتیجه می‌شود:

$$\gamma=(\frac{\pi}{30})^R\quad,\quad \beta=(\frac{\pi}{60})^R\quad,\quad \alpha=(\frac{\pi}{20})^R$$

۱۰ـ باتوجه به رابطهٔ داده شده داریم:

$$3(A^2+B^2+C^2)\geqslant A^2+B^2+C^2+2(AB+BC+CA)\Rightarrow$$

$$3(A^2+B^2+C^2)\geqslant(A+B+C)^2=\pi^2$$

۱۱ـ (۱) $K_1,K_2\in Z\quad,\quad y=K_2\pi+\frac{\pi}{12}\quad,\quad x=K_1\pi+\frac{\pi}{4}$

(۲) $y=K_2\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\quad,\quad x=K_1\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

(۳) $y=K_2\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{24}\quad,\quad x=K_1\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{24}$

۱۲ـ اولا": $K_1,K_2\in Z\quad,AN=2K_2\pi-\frac{3\pi}{4},\quad AM=2K_1\pi+\frac{\pi}{3}$

ثانیا": بنابه رابطهٔ شال داریم: $(K_3\ ,m,n\in Z)$

$$\widehat{AN}=\widehat{AA'}+\widehat{A'N}\quad,\quad \widehat{AM}=\widehat{AA'}+\widehat{A'M}$$

از اینجا

$$\widehat{A'M}=\widehat{AM}-\widehat{AA'}=2K_1\pi+\frac{\pi}{3}-(2K_3\pi+\pi)\Rightarrow$$

$$A'M=2m\pi-\frac{2\pi}{3}$$

$$\widehat{A'N}=\widehat{AN}-\widehat{AA'}=2K_2\pi-\frac{3\pi}{4}-(2K_3\pi+\pi)\Rightarrow A'M=2n\pi-\frac{7\pi}{4}$$

یادآوری:

کمانهای $A'M$ و $A'N$ را به ترتیب به صورتهای زیر نیز می‌توان نوشت:

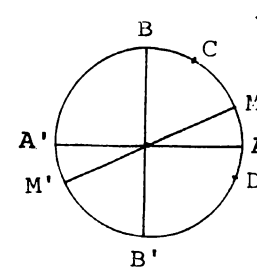
$$2n\pi+\frac{\pi}{4}\quad,\quad 2m\pi+\frac{4\pi}{3}$$

۱۳ـ

$$\widehat{AM}=\frac{\widehat{AC}+\widehat{AD}}{2}\Rightarrow$$

$$\widehat{AM}=\frac{(۳۶۰^\circ K_1+۶۰^\circ)+(۳۶۰^\circ K_2-۳۰^\circ)}{۲}\Rightarrow$$

$$\widehat{AM}=۱۸۰^\circ K+۱۵^\circ$$



یادآوری:

به‌طوری که قبلا" نیز گفته شد $\widehat{AM}$ دو کمان مثلثاتی است : AM و AM'

۱۴ـ اولا" : باتوجه به رابطه شال داریم : $(K \in Z)$

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} - \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AB} = 2(K_1 - K_2)\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow AB = 2K\pi + \frac{\pi}{3}$$

ثانیا" : $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CA'} = \widehat{A'B'} = \widehat{B'C'} = \widehat{C'A} = \frac{\pi}{3}$

باتوجه به رابطه فوق شش ضلعی منتظم است پس رابطهٔ کلی روٴس شش ضلعی عبارت است از

$$(n \in Z)\ ,\ AM = n\frac{\pi}{3}$$

۱۵ـ $AM = 2K_1\pi - \frac{\pi}{4}$ (کمان مثلثاتی) و

$AN = 2K_2\pi + \frac{\pi}{5}$ (کمان مثلثاتی)

پس:

$$(K_1, K_2, K \in Z)\ ,\ \widehat{MN} = \widehat{AN} - \widehat{AM} = 2K\pi + \frac{9\pi}{20}$$

۱۶ـ اگر اولین رأس ده ضلعی نقطهٔ A باشد دستورکلی برای تعیین روٴس آن عبارت‌است از:

$AM = \frac{۳۶۰^\circ}{۱۰} = ۳۶^\circ K$ حال اگر مبداء را به نقطه M_1 منتقل کنیم داریم :

$AM = (۴۰K + ۲۰)^G$ یا $\widehat{AM} = ۳۶^\circ K + ۱۸^\circ$

۱۷ـ (۱) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$, $tg\,\alpha = \frac{15}{8}$, $Cotg\,\alpha = \frac{8}{15}$

(۲) $\sin\beta = \frac{12}{13}$, $tg\beta = \frac{-12}{5}$, $Cotg\,\beta = \frac{-5}{12}$

(۳) $\sin\gamma = \frac{7}{25}$, $\cos\gamma = \frac{-24}{25}$, $Cotg\,\gamma = \frac{24}{7}$

(۴) $\sin\lambda = \frac{-\sqrt{2}}{10}$, $\cos\lambda = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $tg\lambda = \frac{-1}{7}$

۱۸ـ (۱) ۳/۵

(۲) $۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$

(۳) ۲

(۴) $۲-\sqrt{۳}$

۱۹ـ $\sin\alpha = \frac{-3}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $A = \frac{180}{13}$

۲۰- $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin 4 < 0 \quad , \quad \sin 4^\circ > 0$

۲۱- $tg\,\alpha \,.\cos\alpha = \sin\alpha < 0 , \sin\alpha \cos\alpha > 0 \Rightarrow$

$\cos\alpha < 0 \Rightarrow \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

۲۲- $\cot gx = \frac{5}{12} \;, tgx = \frac{12}{5} \;, \cos x = \frac{5}{13} \;, \sin x = \frac{12}{13}$

۲۳- $\cot gB = \frac{-4}{3} \;, \sin B = \frac{3}{5} \;, tg\alpha = \frac{3}{4} \;,$

$A = \frac{-5}{24} \;, \cos\alpha = \frac{4}{5}$

۲۴- $\alpha - \beta = 30^\circ \;, \alpha + \beta = 60^\circ \Rightarrow \beta = 15^\circ \;, \alpha = 45^\circ$

۲۵- اولا": $\cot g\varphi = \frac{-2\sqrt{x}}{x-1} \;, tg\varphi = -\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \;, \cos\varphi = \frac{-2\sqrt{x}}{x+1}$

ثانیا": $x = ۲$

۲۶- $A = ۱$

۲۷- $\frac{1}{\sin x . \cos x} = \frac{3}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \;,$

$tgx = \frac{\sqrt{2}}{4} \;, \cot gx = 2\sqrt{2}$

۲۸- $\sqrt{\cot g^2\varphi - \cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{|\sin\varphi|} \;, \pi < \varphi < 2\pi \Rightarrow$

$\frac{\cos^2\varphi}{|\sin\varphi|} = \frac{-\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$

$A = \sin\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi}$

۲۹- $B + C = 90^\circ \Rightarrow tgC = \cot gB = \frac{1}{tgB} \Rightarrow$

$tgB + \frac{1}{tgB} = 6 \Rightarrow tgB = 3 - 2\sqrt{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow B < 30^\circ$

۳۰- $y = \frac{1 + 2|\cos\varphi \sin\varphi|}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} \;, \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi \Rightarrow$

$y = \frac{1 - \sin\varphi \cos\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} \Rightarrow$

$y = \frac{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}$

۳۱- $(a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2ab} \geqslant 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow \cos 5x = \cos 3x = 1$

۳۲- $tgx = \frac{1}{2}$, $Cotgx = 2$, $Cosx = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $Sinx = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$tgy = \frac{-1}{3}$, $Cotgy = -3$, $Cosy = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$, $Siny = \frac{\sqrt{10}}{10}$

۳۳- $\frac{1}{Sin^2\alpha} = 1 + Cotg^2\alpha \Rightarrow \frac{1}{Sin^2\alpha} - \frac{1}{tg^2\alpha} = 1 \Rightarrow m = 1$

۳۴- $Sinx + Siny = 2 \Rightarrow Sinx = Siny = 1 \Rightarrow x = y = 90^\circ \Rightarrow M = 1$

۳۵- $1 + (a+1)^2 = \frac{2}{(a+1)^2} \Rightarrow (a+1)^4 + (a+1)^2 - 2 = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$

$tgx = 1 \Rightarrow x = ۴۵^\circ$ و $a = -۲$ قابل قبول نیست

۳۶- اگر به طرفین نامساوی $2Sin\varphi Cos\varphi \leqslant 1$ اتحاد $Sin^2\varphi + Cos^2\varphi = 1$ را اضافه کنیم خواهیم داشت

$(Sin\varphi + Cos\varphi)^2 \leqslant 2 \Rightarrow Sin\varphi + Cos\varphi \leqslant \sqrt{2}$

۳۷-

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} tgx > 1 \Rightarrow m > 0 \\ tgx < -1 \Rightarrow -2 < m < 0 \end{cases}$$

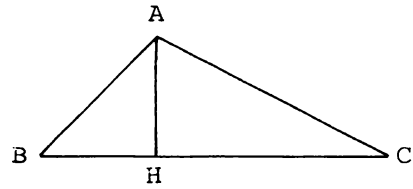
۳۸- $\Delta' \geqslant 0 \Rightarrow Cos^2\alpha \leqslant \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant Cos\alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\frac{7\pi}{6} \leqslant \alpha \leqslant \frac{11\pi}{6}$ یا $\frac{\pi}{6} \leqslant \alpha \leqslant \frac{5\pi}{6}$

۳۹- $tgB = 3 \Rightarrow CotgB = \frac{1}{3} = \frac{BH}{AH}$

$tgC = \frac{1}{2} \Rightarrow CotgC = 2 = \frac{CH}{AH}$

$CotgB + CotgC = \frac{BH + HC}{AH} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{14}{AH} = \frac{7}{3} \Rightarrow AH = 6$



۴۰- اگر صورت کسر A را C فرض کنیم داریم:

$C = 2(Sin^2x + Cos^2x - Sin^3x - Cos^3x) \Rightarrow$

$C = 2[Sin^2x(1 - Sinx) + Cos^2x(1 - Cosx)] \Rightarrow$

$C = 2[(1 - Cos^2x)(1 - Sinx) + (1 - Sin^2x)(1 - Cosx)] \Rightarrow$

$$C = 2(1 - \sin x)(1-\cos x)(2 + \sin x + \cos x)$$

$$A = 2 - 2\sin x - 2\cos x + 2\sin x\cos x \Rightarrow$$

$$A = (1-\sin x - \cos x)^2$$

۴۱- $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot g^2 x \Rightarrow ab^2 + 5a - 2ab + 2a\sqrt{b}\ (b-3) = 16$

باتوجه به رابطه فوق طرف دوم فاقد عدد اصم است پس ضریب $\sqrt{b}$ در طرف اول برابر صفر است.

$$b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 9a + 5a - 6a = 16 \Rightarrow a = 2$$

پس

$$\sin x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$tgx = 2 - \sqrt{3}, \quad \cot gx = 2 + \sqrt{3}$$

۴۲-

$$a^3 tg^3\alpha + b^3 \cot g^2\alpha + c^3 \cot g\alpha \geqslant 3\sqrt[3]{a^3 tg^3\alpha . b^3 \cot g^2\alpha . c^3 \cot g\alpha} \ (1) \Rightarrow$$

$$a^3 tg^3\alpha + b^3 \cot g^2\alpha + c^3 \cot g\ \alpha \geqslant 3abc \Rightarrow 3abc \geqslant 3abc$$

در رابطه (۱) حالت تساوی وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$a^3 tg^3\alpha = b^3 \cot g^2\alpha = c^3 \cot g\alpha \Rightarrow tg^5\alpha = \frac{b^3}{a^3},$$

$$\cot g\alpha = \frac{c^3}{b^3} \Rightarrow c^5 = ab^4$$

۴۳- اگر صورت و مخرج کسر را بر $\cos^3\varphi$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$M = \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi)} = \frac{1 + tg^2\varphi}{tg^2\varphi\ (1 - tg\varphi)}$$

$$= \frac{1 + tg^2\varphi}{tg\ \varphi} \cdot \frac{1}{tg\ \varphi\ (1 - tg\varphi)}$$

$$\frac{1 + tg^2\varphi}{tg\varphi} = \frac{1}{tg\varphi} + tg\ \varphi > 2, \quad tg\ \varphi\ (1 - tg\ \varphi)$$

$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - tg\varphi\right)^2 \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{tg\ \varphi\ (1 - tg\ \varphi)} \geqslant 4 \Rightarrow M > 2 \times 4$$

۴۴- حل ۱: یادآوری می‌کنیم که در ناحیه اول تابع $\sin x$ صعودی و تابع $\cos x$ نزولی است یعنی

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \sin x_1 < \sin x_2,\ \cos x_1 > \cos x_2$$

$$\sin x < x \Rightarrow \begin{cases} \cos(\sin x) > \cos x & (1) \\ \text{(کمان)}\cos x > \sin(\cos x) & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$$

حل ۲:

$$\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < (\frac{\pi}{2} - \cos x) \Rightarrow$$

$$\cos(\sin x) > \cos(\frac{\pi}{2} - \cos x) \Rightarrow \cos(\sin x) > \sin(\cos x)$$

۴۵ـ حل ۱ـ اگر $1 < I < n$ باشد داریم:

$$tga_1 < tga_i < tga_n \Rightarrow tga_1 \cos a_i < \sin a_i < tga_n \cos a_i \quad (1)$$

اگر در رابطهٔ (۱) به جای a_i به ترتیب a_1 ، a_2 ، ... ، a_n را قرار داده نامساویهای به دست آمده را باهم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$tga_1(\cos a_1 + \cos a_2 + \ldots + \cos a_n) < \sin a_1 + \sin a_2 + \ldots + \sin a_n < tga_n(\cos a_1 + \cos a_2 + \ldots + \cos a_n) \Rightarrow$$

$$tga_1 < \frac{\sin a_1 + \sin a_2 + \ldots + \sin a_n}{\cos a_1 + \cos a_2 + \ldots + \cos a_n} < tga_n$$

۴۶ـ جواب (۱) زیرا:

$$M = a(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) + 6\sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow$$

$$M = a + 3\sin^2 x \cos^2 x(2 - a) \Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$$

۴۷ـ جواب (۳) زیرا اتحاد مفروض را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1 - \sin x}{|\cos x|} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$|\cos x| = \cos x \Rightarrow \cos x > 0$$

۴۸ـ جواب (۲) زیرا داریم:

$$\frac{1 - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{1 + 2|\sin\alpha \cos\alpha|}{\cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)} =$$

$$= \frac{1 + 2|\sin\alpha \cos\alpha|}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha \cdot \cos\alpha < 0$$

۴۹ـ جواب (۴) زیرا:

$$3\sin A + 2\sin B = 5 \Rightarrow \sin A = \sin B = 1 \Rightarrow$$

$$A = B = 90^\circ$$

۵۰ ــ جواب (۳):

$$\left|\frac{m^2+1}{2m}\right| \geqslant 1 \Rightarrow |\mathrm{Sin}x| = 1 \Rightarrow \mathrm{Sin}x = \pm 1$$

۵۱ ــ جواب (۱) زیرا:

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}x.\mathrm{Cos}x} = \mathrm{tg}x + \mathrm{Cotg}x = -b, \mathrm{tg}x.\mathrm{Cotg}x = 1 = b-2 \Rightarrow b = 3$$

۵۲ ــ جواب (۴) زیرا:

$$t^2 < \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{t}{2} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \mathrm{Cos}\frac{t}{2} \leqslant 1$$

یادآوری:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \mathrm{Sin}\frac{t}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -1 < \mathrm{tg}\frac{t}{2} < 1,$$

$\mathrm{Cotg}\frac{t}{2} < -1$ یا $\mathrm{Cotg}\frac{t}{2} > 1$

۵۳ ــ جواب (۳)

$$1 - \mathrm{Sin}x \geqslant 0, \quad 1 + \mathrm{Cos}x \geqslant 0 \Rightarrow a.b > 0$$

یادآوری:

واضح است که اگر $1 + \mathrm{Cos}x = 0$ باشد $1 - \mathrm{Sin}x \neq 0$ و بالعکس

۵۴ ــ جواب (۴)

$\mathrm{Sin}x\mathrm{Cos}^2x = 1 \Rightarrow \mathrm{Sin}x = 1, \ \mathrm{Cos}x = \pm 1 \Rightarrow$ که غیرممکن است

۵۵ ــ جواب (۲)

$$\mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{Cotg}^3\alpha = \frac{\mathrm{Sin}^6\alpha + \mathrm{Cos}^6\alpha}{\mathrm{Sin}^3\alpha.\mathrm{Cos}^3\alpha} =$$

$$\frac{1 - 3\mathrm{Sin}^2\alpha\,\mathrm{Cos}^2\alpha}{\mathrm{Sin}^3\alpha.\mathrm{Cos}^3\alpha} = \frac{1 - \frac{3}{9}}{\frac{1}{27}} = 18$$

۵۶ ــ

$$\mathrm{Cos}x\,\mathrm{Cos}2x - \mathrm{Sin}x\,\mathrm{Sin}2x \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Cos}3x \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant 3x \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$$

۵۷ ــ

$$(a+b)+(a-b) = 2a \Rightarrow \mathrm{tg}2a = 7$$

$$(a+b)-(a-b) = 2b \Rightarrow \mathrm{tg}2b = 1$$

۵۸ ــ

$$\begin{cases} -\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{Sin}\alpha + \mathrm{Sin}\alpha = 2x-4 \\ \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{Cotg}\alpha = x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}\alpha = 2 - x \\ \mathrm{Cotg}\alpha = 2 + x \end{cases} \Rightarrow$$

$$4 - x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

۵۹- $\mathrm{Cotg}(k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha \quad ,\mathrm{tg}(k\pi+\frac{\pi}{4})=1$

$$\mathrm{Sin}(3K_1\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases}\mathrm{Cos}\alpha & \text{اگر } K_1 \text{ زوج باشد}\\ -\mathrm{Cos}\,\alpha & \text{اگر } K_1 \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

بنابراین دستگاه مفروض به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases}\mathrm{tg}\,\alpha=-(1+4x)\\ \pm\mathrm{Cos}\alpha=-\sqrt{x+\frac{1}{2}}\end{cases} \quad , 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

حال باتوجه به رابطه $\mathrm{tg}^2\alpha+1=\mathrm{Sec}^2\alpha$ داریم:

$$1+(1+4x)^2=\frac{2}{2x+1} \Rightarrow x=0$$

۶۰- $T_4=\frac{\pi}{2} \quad , T_3=2\pi \quad , T_2=6 \quad , T_1=6\pi$

$T_7=\frac{\pi}{4} \quad , T_6=\pi \quad , T_5=\pi$

۶۱- $\mathrm{Sin}7x\,\mathrm{tg}3.5x+\mathrm{Cos}7x=A \Rightarrow$

$\mathrm{Sin}7x\mathrm{Sin}3.5x+\mathrm{Cos}7x\mathrm{Cos}3.5=A.\mathrm{Cos}3.5 \Rightarrow$

$\mathrm{Cos}(7x-3.5x)=A.\mathrm{Cos}3.5x \Rightarrow A=1$

۶۲- $\mathrm{Sin}3y=\mathrm{Sin}(6k\pi+\frac{3\pi}{2}+3x)=-\mathrm{Cos}3x$

$\mathrm{Cos}3z=\mathrm{Cos}(6k'\pi+\frac{3\pi}{2}-3x)=-\mathrm{Sin}3x \Rightarrow$

$-\mathrm{Cos}3x-\mathrm{Sin}^2 3x=1 \Rightarrow \mathrm{Cos}^2 3x-\mathrm{Cos}3x-2=0 \Rightarrow$

$\mathrm{Cos}3x=-1 \Rightarrow 3x=2k_1\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{2}{3}k_1\pi+\frac{\pi}{3}$

۶۳- $\sqrt{2}\,\mathrm{Cos}x=\frac{1}{\mathrm{Cos}y} \Rightarrow 2\mathrm{Cos}^2x=\frac{1}{\mathrm{Cos}^2y} \Rightarrow 1+\mathrm{Cos}2x$

$=1+\mathrm{tg}^2y$

$\mathrm{tg}^2y=\mathrm{Cos}2x \Rightarrow \mathrm{tg}^2x=\mathrm{Cos}2y$

$0<x,y<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{tg}^2x<1 \Rightarrow 0<\mathrm{tg}x<1 \Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{4}$,

$0<y<\frac{\pi}{4}$

۶۴- $A=4\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5}\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} \Rightarrow A\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5}=4\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5}\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5}\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5} \Rightarrow$

$A\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5}=2\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{5}\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{5}=\mathrm{Sin}\frac{4\pi}{5}=\mathrm{Sin}(\pi-\frac{4\pi}{5}) \Rightarrow$

$A\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5}=\mathrm{Sin}\frac{\pi}{5} \Rightarrow A=1$

۶۵- $2\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{14}=\sin\frac{2\pi}{14}=\cos\frac{5\pi}{14}$

$2\sin\frac{5\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}=\sin\frac{10\pi}{14}=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{14})=\cos\frac{3\pi}{14}$

$3\sin\frac{3\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}=\sin\frac{6\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14}$

از ضرب طرفین روابط فوق در یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$8\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=1$$

۶۶- اولاً $p=2(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3})=2\sin(x-\frac{\pi}{3})\Rightarrow$

$-2\leqslant 2\sin(x-\frac{\pi}{3})=p\leqslant 2$

ثانیاً

$$M=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

با فرض $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ نتیجه‌می‌شود $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ از اینجا

$$M=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)\Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2}\leqslant M\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\quad(1)$$

تبصره:

رابطهٔ (۱) را به‌خاطر بسپارید، زیرا در محدودکردن بعضی از عبارتهای مثلثاتی کاربرد دارد.

مثال:

در فاصله $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ حدود α را چنان معین کنید که معادلهٔ زیر دارای جواب باشد

$$\sqrt{2}\cos x+\sin x=\operatorname{tg}\alpha$$

حل:

$$-\sqrt{3}\leqslant\operatorname{tg}\alpha\leqslant\sqrt{3}\Rightarrow -\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$$

۶۷- $\sin x+\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=$

$$\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}}>4\operatorname{tg}\frac{x}{2}>4\times\frac{x}{2}$$

۶۸- $\sin A+\operatorname{tg}A>2A\ ,\ \sin B+\operatorname{tg}B>2B,\ \sin c+\operatorname{tg}c>2c$

از مجموع نامساویهای بالا نتیجه می‌شود .

$$\sin A + \sin B + \sin c + tgA + tgB + tgC > 2(A + B + C) = 2\pi$$

۶۹ـ نامساوی $\sin x < x$ قبلا" بررسی شده است و برای بررسی رابطهٔ :

$$\sin x > x - \frac{x^3}{4}$$

داریم :

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= 2tg\frac{x}{2}(1-\sin^2\frac{x}{2}) > 2\times\frac{x}{2}(1-\frac{x^2}{4})$$

۷۰ـ

$$\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2} > 1-2\times(\frac{x}{2})^2 \Rightarrow \cos x > 1-\frac{x^2}{2}$$

$$\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2} < 1-2(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{8}) \Rightarrow$$

$$\cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}$$

۷۱ـ اولا"

$$\cos 36^\circ > tg36^\circ \Rightarrow \cos^2 36^\circ > \sin 36^\circ \Rightarrow$$

$$1+\cos 72^\circ > 2\sin 36^\circ \Rightarrow 1+\sin 18^\circ > 2\sin 36^\circ$$

$$= 2\sin(30^\circ + 6^\circ) \Rightarrow$$

$$1+2\sin 9\cos 9 > 2\sin 30\cos 6^\circ + 2\cos 30^\circ \sin 6^\circ \qquad (1)$$

$$= \cos 6 + 2\cos 30^\circ \sin 6^\circ$$

رابطه (۱) رابطهٔ مسلمی است زیرا :

$$1 > \cos 6^\circ \ , \ \sin 9^\circ > \sin 6^\circ \ , \ \cos 9^\circ > \cos 30^\circ$$

ثانیا"

$$\cos^2\alpha > \sin\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 < 0 \Rightarrow$$

$$0 \leqslant \sin\alpha < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow 0 \leqslant \alpha < \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

۷۲ـ

$$\cos A = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow x = \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = tg^2\frac{A}{2}$$

به همین ترتیب $y = tg^2\frac{B}{2}$ و $z = tg^2\frac{C}{2}$ از اینجا داریم :

$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} = tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+$$

$$tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 1$$

۷۳ـ

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta} = \frac{2tg\beta}{1+3tg^2\beta} \quad (1)$$

اگر صورت و مخرج کسر (۱) را بر $tg\,\beta$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{2}{Cotg\,\beta+3tg\,\beta}\Rightarrow tg^2(\alpha-\beta)=\frac{4}{(Cotg\beta+3tg\,\beta)^2}$$

$$=\frac{4}{(Cotg\,\beta-3tg\beta)^2+12}\Rightarrow$$

$$tg^2(\alpha-\beta)\leqslant\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\quad tg(\alpha-\beta)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\alpha-\beta\leqslant 30^\circ$$

۷۴- $$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgxtgy}=\frac{(a-1)tgy}{1+atg^2y}\quad(1)$$

صورت و مخرج کسر (۱) را بر tgy تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$tg(x-y)=\frac{a-1}{Cotgy+atgy}\Rightarrow tg^2(x-y)=\frac{(a-1)^2}{(Cotgy+atgy)^2}\Rightarrow$$

باتوجه به رابطهٔ $Cotg\,y+a\,tg\,y\geqslant 2\sqrt{Cotgy.atgy}=2\sqrt{a}$ داریم:

$$tg^2(x-y)\leqslant\frac{(a-1)^2}{4a}$$

۷۵- اولاً: $$\frac{Sin^2\varphi}{Cos3\varphi}=\frac{4Cos\varphi\,(1-Cos^2\varphi)}{4Cos\varphi-Cos3\varphi}=\frac{Cos\varphi-Cos3\varphi}{4Cos\varphi\,Cos3\varphi}\Rightarrow$$

$$\frac{Sin^2\varphi}{Cos3\varphi}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Cos3\varphi}-\frac{1}{Cos\varphi}\right)$$

ثانیاً:

$$Sin=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Cos2}-\frac{1}{Cos\varphi}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Cos3^n\varphi}-\frac{1}{Cos3^{n-1}\varphi}\right)\Rightarrow$$

$$S_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Cos3^n\varphi}-\frac{1}{Cos\,\varphi}\right)$$

۷۶- $$A=Sin\left[2\times\frac{\pi}{4}-3\times(-\frac{\pi}{4})+\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$=Sin(2\pi+\frac{2\pi}{3})=Sin(\frac{2\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۷۷- $$ArcSinCos\,\frac{5\pi}{8}=ArcSinCos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8})$$

$$=ArcSin(-Sin\frac{\pi}{8})=-\frac{\pi}{8}$$

$$ArcCos\;Cotg\,\frac{5\pi}{4}=Arc\,Cos\,1=0$$

$$Arc\,tg\;tg\,(\frac{7\pi}{8})=Arctgtg(\pi-\frac{\pi}{8})=Arc\,tg\,tg(-\frac{\pi}{8})=-\frac{\pi}{8}$$

$$\text{Arc Cotg Cotg}\left(\frac{-\pi}{8}\right)=\text{Arc Cotg Cotg}\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{7\pi}{8}$$

پس:

$$\phi=\frac{-\pi}{8}+0-\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\frac{5\pi}{8}$$

۷۸- (۱) الف:

$0\leqslant x\leqslant 1$

$$\text{Arc Sin}x=\alpha \Rightarrow \text{Sin}\alpha=x\ ,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Cos}\alpha=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \alpha=\text{Arc Cos}\sqrt{1-x^2}=\text{ArcSin}x$$

ب:

$-1\leqslant x<0$

$$\text{Arc Sin}x=-\beta,\ 0<\beta\leqslant\frac{\pi}{2},\ \text{Cos}(-\beta)=\text{Cos}\beta=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$$

$$\beta=\text{Arc Cos}\sqrt{1-x^2}=-\text{ArcSin}x$$

(۲) الف:

$0\leqslant x\leqslant 1$

$$\text{ArcCos}x=\alpha \Rightarrow \text{Cos}\alpha=x,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},\ \text{Sin}\alpha=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$$

$$\alpha=\text{Arc Sin}\sqrt{1-x^2}=\text{ArcCos}x$$

ب:

$-1\leqslant x<0$

$$\text{Arc Cos}x=\pi-\beta,\ 0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2},\ \text{Sin}(\pi-\beta)=\text{Sin}\beta \Rightarrow$$

$$\text{Sin}\beta=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \beta=\text{ArcSin}\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \pi-\beta$$

$$=\pi-\text{ArcSin}\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$$

$$\pi-\text{ArcSin}\sqrt{1-x^2}=\text{ArcCos}x$$

(۳) الف:

$x>0$

$$\text{Arc tg}x=\alpha\ ,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\ ,\ \text{Cotg}\alpha=\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\alpha=\text{Arc Cotg}\frac{1}{x}=\text{Arc tg}\,x$$

ب:

$x<0$

$$\text{Arc tg}x=-\beta\ ,\ 0<\beta<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Cotg}\beta=\frac{-1}{x} \Rightarrow$$

$$\beta=\text{Arc Cotg}\left(\frac{-1}{x}\right)=\pi-\text{ArcCotg}\frac{1}{x}=-\text{Arc tg}x$$

(۴) الف:

$x>0$

$$\text{Arc Cotg}x=\alpha\ ,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{tg}\alpha=\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\text{Arc tg}\frac{1}{x}=\alpha=\text{Arc Cotg}x$$

ب:

$x<0$

$\text{Arc Cotg}x=\pi-\beta \quad ,0<\beta<\frac{\pi}{2} \Rightarrow tg\beta=-\frac{1}{x} \Rightarrow$

$\beta=\text{Arc tg}(-\frac{1}{x})=-\text{Arctg}\frac{1}{x} \Rightarrow \text{ArcCotg}x=\pi+\text{Arctg}\frac{1}{x}$

۷۹- $x>0 \Rightarrow \text{Arc tg}x+\text{Arc tg}\frac{1}{x}=\text{Arctg}x+\text{ArcCotg}x=\frac{\pi}{2}$

$x<0 \Rightarrow \text{Arc tg}x+\text{Arc tg}\frac{1}{x}=\text{Arc tg}x+\text{ArcCotg}x-\pi$

$=\frac{\pi}{2}-\pi=\frac{-\pi}{2}$

۸۰- $\text{Arc tg}\frac{1}{3}+\text{Arc tg}\frac{1}{4}=\text{Arc tg}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{12}}=\text{Arc tg}\frac{7}{11} \Rightarrow$

$a=7 \ , \ b=11$

۸۱- $f(x)=\text{Arctg}1-\text{Arctg}x=\frac{\pi}{4}-\text{Arctg}x$

$f(-x)=\frac{\pi}{4}+\text{Arc tg}x \Rightarrow f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$

۸۲- $\varphi=\text{Arctg}1+\text{Arctg}2=\text{Arctg}\frac{3}{1-2}+\pi=\pi-\text{Arctg}3$ (۱)

$\text{Arc tg tg}\varphi=\text{Arc tg tg}(\pi-\text{Arc tg}3)$ (۲)

$=\text{Arctgtg}(-\text{Arctg}3)=\text{Arctgtg}[\text{Arctg}(-3)]=\text{Arctg}(-3)=-\text{Arctg}3$

۸۳- $\text{Arctg}a-\text{Arctg}b=\text{Arctg}\frac{a-b}{1+ab}<\frac{a-b}{1+ab}<a-b$

۸۴- اولاً

$\text{Arc tg}\frac{n}{n+1}-\text{Arc tg}\frac{n-1}{n}=\text{Arctg}\frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}}{1+\frac{n-1}{n+1}}$

$=\text{Arctg}\frac{1}{2n^2}$

ثانیاً

$S_n=\text{Arctg}\frac{1}{2}+(\text{Arctg}\frac{2}{3}-\text{Arc tg}\frac{1}{2})+\ldots+$

$(\text{Arctg}\frac{n}{n+1}-\text{Arctg}\frac{n-1}{n}) \Rightarrow S_n=\text{Arctg}\frac{n}{n+1}$

تبصره:

مسئله را به‌وسیله استقراء نیز می‌توان حل کرد.

۸۵- جواب (۴) $2\pi:\frac{3}{m}=5\pi \Rightarrow m=\frac{15}{2}$

۸۶- جواب (۱) $\text{Cotg}x-tgx=2\text{Cotg}2x=\frac{2}{3} \Rightarrow \text{Cotg}2x=\frac{1}{3} \Rightarrow$

$tg2x = 3$

۸۷- جواب (۳)

$x = \frac{\pi}{2} + y \Rightarrow Cotgx = -tgy \Rightarrow tgx + Cotgx$

$= \frac{2}{Sin2x}$

۸۸- جواب (۲) $B + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow tgB + tgC = tgB + CotgB = \frac{2}{Sin2B}$

۸۹- جواب (۳) $Cotg2\ Arctg\ \frac{3}{2} = Cotg\ [\ Arctg(\frac{2\times\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{4}}) + \pi]$

$= Cotg\ [\ \pi - Arctg\ \frac{12}{5}\ ]$

$= Cotg\ [\pi - ArcCotg\ \frac{5}{12}\ ]$

$= Cotg(-ArcCotg\frac{5}{12}) = \frac{-5}{12}$

۹۰- جواب (۳) $ArcCosx = \alpha \Rightarrow Cos\ \alpha = x \Rightarrow Sin^2\ \alpha = 1 - x^2 \Rightarrow$

$A = 1$

۹۱- جواب (۲) $Arctgx + Arctgy = Arctg1 \Rightarrow Arctg\ \frac{x+y}{1-xy}$

$= Arctg1 \Rightarrow \frac{x+y}{1-xy} = 1 \Rightarrow$

$y = \frac{1-x}{1+x}$ تابع هموگرافیک،

۹۲- جواب (۳) $Arc\ Cotgx = \alpha\ , ArcCotgy = \beta, Arc\ Cotg\ z = \gamma,$

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow Cotg\alpha + Cotg\beta + Cotg\gamma$

$= Cotg\alpha\ Cotg\beta\ Cotg\gamma \Rightarrow x + y + z = xyz$

۹۳- جواب (۱) $Arc\ tg\ \frac{(1+x)+(1-x)}{1-(1-x^2)} = Arctg1 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 1 \Rightarrow$

$x = \pm\sqrt{2}$

۹۴- جواب (۴) $f(x) = (Sin^2\frac{x}{2})' \Rightarrow f(x) = (\frac{1-Cosx}{2})' = \frac{1}{2}\ Sinx$

$[\ f(ArcSinx)]' = [\ \frac{1}{2}\ Sin(ArcSinx)]' = (\frac{1}{2}x)' = \frac{1}{2}$

۹۵- جواب (۲) $-\pi \leqslant x \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant x + \pi \leqslant \pi \Rightarrow f(x+\pi) = 0 = f(x) +$

$Sinx \Rightarrow f(x) = -Sinx$

به‌طورکلی به ازای $(k \in z), k\pi \leqslant x \leqslant (k+1)\pi$ ، ازرابطهٔ مفروض داریم

$f(x)=k\sin x$

۹۶ـ جواب (۳)

$\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} \Rightarrow -1 \leqslant \cos x \leqslant \frac{-1}{2} \Rightarrow$

$-\pi \leqslant f(x) \leqslant -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=-f(x)-\pi$

۹۷ـ جواب (۴)

$y=\operatorname{Arctg}(\sin x)+\operatorname{Arctg}(-\sin x)=0$

۹۸ـ جواب (۲)

$y=\operatorname{ArcCos}(-\cos 2x) \Rightarrow y=\pi-\operatorname{ArcCos}\cos 2x$

$=\pi-2x$

۹۹ـ جواب (۴)

$\frac{-4}{5} \leqslant (\text{کمان})\, x \leqslant \frac{4}{5} \Rightarrow 0 \leqslant \text{کمان}\, x^2 \leqslant \frac{16}{25} \Rightarrow$

$0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{\pi}{2}$

$y=x^2+x^2=2x^2$

۱۰۰ـ جواب (۱)

$$x \geqslant 1 \Rightarrow \begin{cases} 2\operatorname{Arctg}x=\pi+\operatorname{Arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}=\pi-\operatorname{Arctg}\frac{2x}{x^2-1} \\ \operatorname{ArcSin}\frac{2x}{1+x^2}=\operatorname{Arctg}\frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}=\operatorname{Arctg}\frac{2x}{x^2-1} \end{cases}$$

۱۰۱ـ

$a^2+b^2 \geqslant c^2 \Rightarrow 16\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}+16\operatorname{tg}^4\frac{\varphi}{2} \geqslant 25\operatorname{tg}^4\frac{\varphi}{2}+$

$10\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}+1 \Rightarrow$

$(3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1)^2 \leqslant 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\frac{\varphi}{2}=k\pi\pm\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۱۰۲ـ

$(-1+a^2)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}-(1+a^2)=0 \Rightarrow$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{2a}{a^2-1}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1+a^2}{1-a^2}$

$\frac{4a^2}{(a^2-1)^2}-\frac{(1+a^2)^2}{(1-a^2)^2}+1=\frac{4a^2-4a^2}{(a^2-1)^2}=0$

۱۰۳ـ

$\frac{\cos 20^\circ(4\cos^3 10^\circ-3\cos 10^\circ)}{\cos^2 10^\circ}=\frac{\cos 20^\circ(4\cos^2 10^\circ-3)}{\cos 10^\circ}=$

$$\frac{\cos 20^\circ(2\cos 20^\circ-1)}{\sin 80^\circ}=\frac{2\cos 20^\circ(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)}{4\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ}$$

$$=\frac{2\sin 20^\circ\sin 40^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 40^\circ}=\operatorname{tg}40^\circ=\operatorname{cotg}50^\circ$$

$$=\operatorname{cotg}x\Rightarrow x=50^\circ$$

۱۰۴ـ باتوجه به روابط ، $\cos(a-x)\neq 0$ و $\cos x\neq 0$ داریم :

$$\sin(a-x)\cos(a-x)=\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2(a-x)=\sin 2x\Rightarrow$$

$$2x=2k\pi+2a-2x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{a}{2}$$

۱۰۵ـ پس از تبدیل حاصل‌ضربها به مجموع داریم :

$$\cos 6x+\cos 2\alpha+\cos 10x+\cos 2\alpha=2\cos 2\alpha\Rightarrow \cos 10x$$

$$=-\cos 6x\Rightarrow$$

$$10x=(2k+1)\pi\pm 6x\Rightarrow\begin{cases}4x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\\ 16x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{8}+\dfrac{\pi}{16}\end{cases}$$

۱۰۶ـ

$$4\cos^2x-4\cos x\cos 11^\circ+4\cos^2 11^\circ-3=0\Rightarrow$$

$$\Delta'=4\cos^2 11^\circ-4(4\cos^2 11^\circ-3)\Rightarrow \Delta'=12\sin^2 11^\circ\Rightarrow$$

$$\cos x=\frac{2\cos 11^\circ\pm 2\sqrt{3}\sin 11^\circ}{4}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\cos x_1=\cos(60^\circ+11^\circ)=\cos 71^\circ\Rightarrow x=(360k\pm 71^\circ)\\ \cos x_2=\cos(60-11^\circ)=\cos 49^\circ\Rightarrow x=(360k\pm 49^\circ)\end{cases}$$

۱۰۷ـ طرفین معادله را در $\sin x$ ضرب کنیم ، خواهیم داشت :

$$\sin 4x\cos 3x=\sin x\Rightarrow \sin 7x+\sin x=2\sin x\Rightarrow$$

$$\sin 7x=\sin x\Rightarrow\begin{matrix}7x=2k\pi+x\\ 7x=2k\pi+\pi-x\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{k\pi}{3}\\ x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{8}\end{cases}$$

۱۰۸ـ باتوجه به فرمول ، $2\sin^2 a=1-\cos 2a$ معادلهٔ به صورت‌زیردرمی‌آید .

$$\cos 2x+\cos 4x=\cos 6x+\cos 8x\Rightarrow \cos 3x\cos x$$

$$=\cos 7x\cos x\Rightarrow$$

$\cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\cos 7x=\cos 3x\Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}$ یا

$$x = \frac{k\pi}{5}$$

۱۰۹ـ با تبدیل حاصل‌ضرب به مجموع ، معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\cos(3x - \varphi) = \cos(x + \varphi) \Rightarrow 3x - \varphi = 2k\pi \pm (x + \varphi) \Rightarrow$$

$$x = k\pi + \varphi \quad \text{یا} \quad x = \frac{k\pi}{2}$$

۱۱۰ـ باتوجه ، $\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2} = \pi - 3\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right)$ و با فرض $\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} = y$

معادله به صورت زیر درمی‌آید .

$$\sin(\pi - 3y) = 2\sin y \Rightarrow \sin 3y = 2\sin y \Rightarrow$$

$$\sin y - 4\sin^3 y = 0$$

$$\sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{5}$$

$$\sin y = \pm\frac{1}{2} = \sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{14\pi}{15} \\ x = 2k\pi + \frac{4\pi}{15} \end{cases}$$

۱۱۱ـ باتوجه به اتحاد شرطی ، اگر $a + b + c = 0$ باشد داریم، $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$(\sin^2 x - 2)(\cos 2x + \sin^2 x) = 0 \Rightarrow$$

$$\sin^2 x - 2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\cos 2x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۱۱۲ـ اولا" معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$tg2x = \frac{(2m-1)(tg6x - tg5x)}{1 + tg5x\, tg6x} = (2m-1)tgx \Rightarrow$$

$$\frac{2tgx}{1 - tg^2 x} = (2m-1)tgx \Rightarrow$$

$$tgx = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

و

$tg^2x = \frac{2m-3}{2m-1}$ و با فرض $\frac{2m-3}{2m-1} \geqslant 0$ داریم ،

$$tgx = \pm\sqrt{\frac{2m-3}{2m-1}} = \pm tg\alpha$$

از اینجا $x = k\pi \pm \alpha$.

ثانیا"

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt{\frac{2m-3}{2m-1}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$m = 2$$

۱۱۳- $3Sinx + \sqrt{3}\ Cosx = 2\sqrt{3}\ Sin(x + \frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}\,z$

حال اگر z را در معادله قرار داده و خلاصه کنیم خواهیم داشت :

$$12y^2 - 20\sqrt{3}\ zy + 37 - 12z^2 = 0$$

برای آنکه y مقدار حقیقی داشته باشد

$$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow 1-z^2 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$|z| \geqslant 1 \Rightarrow |Sin(x + \frac{\pi}{6})| \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$Sin(x + \frac{\pi}{6}) = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, & y = \frac{5}{2\sqrt{3}} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}, & y = \frac{-5}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

۱۱۴- اولا" :

$$tg\alpha = \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$Sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}, \quad Cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$$

$$tg\beta = 2\sqrt{7} \Rightarrow$$

$$Sin\beta = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{29}}, \quad Cos\beta = \frac{1}{\sqrt{29}}$$

ثانیا" اگر طرفین معادله را بر $\sqrt{۵۸}$ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{7}{\sqrt{58}}\ Sin7x - \frac{3}{\sqrt{58}}\ Cos7x = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{29}} Cos3x + \frac{1}{\sqrt{29}} Sin3x \Rightarrow$$

$$\sin(7x-\alpha)=\sin(3x+\beta)\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2k\pi}{4}+\dfrac{\alpha+\beta}{4} \\ x=\dfrac{k\pi}{5}+\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\alpha-\beta}{10} \end{cases}$$

۱۱۵ــ دو کمان $2x-\frac{5\pi}{8}$ و $2x-\frac{\pi}{8}$ متمم یکدیگرند پس معادله فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sin^2(2x-\frac{\pi}{8})-2p\sin(2x-\frac{\pi}{8})+q=0\Rightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{8})=$$

$$p\pm\sqrt{p^2-q}$$

حال اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند داریم.

$$\sin(2x'-\frac{\pi}{8})=p+\sqrt{p^2-q}\ ,\ \sin(2x''-\frac{\pi}{8})=p-\sqrt{p^2-q}\Rightarrow$$

$$x'-x''=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$

$$2x'=\frac{\pi}{2}+2x''\Rightarrow$$

$$2x'-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+(2x''-\frac{\pi}{8})\Rightarrow$$

$$\sin(2x'-\frac{\pi}{8})=\cos(2x''-\frac{\pi}{8})$$

باتوجه به اتحاد، $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ داریم:

$$4p^2-2q=1\Rightarrow 4p^2=2q+1$$

۱۱۶ــ اولاً

$$p=\frac{a+b+c}{2}=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\qquad \cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}=\frac{p}{p-a}$$

$$\Rightarrow$$

$$p-a=\frac{b+c-a}{2}=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\qquad \cot g\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}=\frac{p-a}{p-b}$$

$$p-b=\frac{c+a-b}{2}=4R\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

ثانیاً

$$\frac{p}{p-b}=\cot g\frac{C}{2}.\cot g\frac{A}{2}\ ,\ \frac{p}{p-c}=$$

$$\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}$$

و

$$\frac{p-b}{p-c}=\cot g\frac{B}{2}\,tg\frac{C}{2}\ ,\ \frac{p-c}{p-a}=\cot g\frac{C}{2}\,tg\frac{A}{2}$$

۱۱۷- متساوی‌الساقین

$$aSinB-aSinC=a\sqrt{2}\,Sin\frac{B-C}{2}$$

$$2Sin\frac{B-C}{2}Cos\frac{B+C}{2}=\sqrt{2}\,Sin\frac{B-C}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Sin\frac{B-C}{2}=0\\ Cos\frac{B+C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=Sin\frac{A}{2}\end{cases}$$

قائم‌الزاویه

۱۱۸-

$$\frac{a\ SinB}{a\ SinC}=2+\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\frac{SinB+SinC}{SinB-SinC}=\frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\frac{Sin\frac{B+C}{2}Cos\frac{B-C}{2}}{Cos\frac{B+C}{2}Sin\frac{B-C}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$tg\frac{B+C}{2}\cdot Cotg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$tg\frac{B+C}{2}=1\Rightarrow$$

$$B+C=90^\circ,\ B-C=60^\circ\Rightarrow$$

$$B=75^\circ,\ C=15^\circ,\ A=90^\circ$$

۱۱۹-

$$2R(SinACos2B+2SinBCosACosB)=$$

$$2R(SinCCosB-SinBCosC)$$

$$SinA\ Cos2B+Sin2BCosA=SinC\ CosB-SinBCosC\Rightarrow$$

$$Sin(A+2B)=Sin(C-B)=Sin\ [\pi-(C-B)]=$$

$$Sin(A+B+C-C+B)=Sin(A+2B)$$

۱۲۰-

$$M=\frac{1}{2}Sin\frac{A}{2}(Cos\frac{B-C}{2}-Cos\frac{B+C}{2})=$$

$$\frac{1}{2}Sin\frac{A}{2}(Cos\frac{B-C}{2}-Sin\frac{A}{2})\leqslant\frac{1}{2}Sin\frac{A}{2}(1-Sin\frac{A}{2})=$$

$$-\frac{1}{2}(Sin^2\frac{A}{2}-Sin\frac{A}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}(Sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{1}{8}$$

۱۲۱-

$$N=\frac{1}{2}CosA\ [Cos(B-C)+Cos(B+C)]=$$

$$\frac{1}{2}CosA[Cos(B-C)-CosA]\leqslant\frac{1}{2}CosA(1-CosA)=$$

$$=-\frac{1}{2}(\cos^2 A-\cos A+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}(\cos A-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{1}{8}$$

۱۲۲- $$\frac{tgA}{tgB}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}\Rightarrow\frac{\cos B}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sin B}\Rightarrow$$

$$\sin 2A=\sin 2B\Rightarrow$$

$2A=2B\Rightarrow A=B$ متساوی‌الساقین

$2A+2B=\pi\Rightarrow A+B=\frac{\pi}{2}$ قائم‌الزاویه

۱۲۳- $$M=\frac{1}{tgA(tgB+tgC-tgA)}=\frac{1}{tgB(tgC+tgA-tgB)}$$

$$=\frac{1}{tgC(tgA+tgB-tgC)}\Rightarrow$$

$$tg^2B-tg^2C=tgA(tgB-tgC)\Rightarrow(tgB-tgC)(tgB+tgC-tgA)=0$$

عبارت $tgB+tgC-tgA$ که مخرج یکی از کسرها است نمی‌تواند صفر شود پس

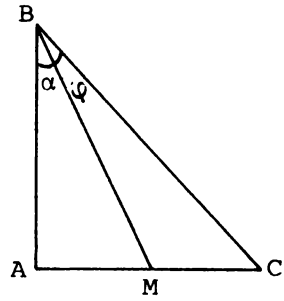
$tgB-tgC=0\Rightarrow B=C$ به همین‌ترتیب: $tgA-tgB=0\Rightarrow A=B$

یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۱۲۴- $$\varphi=B-\alpha\Rightarrow tg\,\varphi=\frac{tgB-tg\,\alpha}{1+tg\,\alpha\,tgB}$$

$$tg\,\alpha=\frac{\frac{AC}{2}}{AB}=\frac{AC}{2AB}=\frac{1}{2}\,tgB$$

$$tg\,\varphi=\frac{tgB-\frac{1}{2}\,tgB}{1+\frac{1}{2}tg^2B}=\frac{tgB}{2+tg^2B}$$



۱۲۵- $$\sin B-\sin A=n\sin C\Rightarrow 2\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{B+A}{2}=$$

$$2n\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\Rightarrow$$

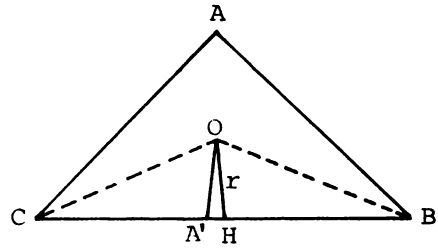
و $\cos\frac{B+A}{2} = \sin\frac{C}{2}$ پس $\sin\frac{B-C}{2} = n\cos\frac{C}{2}$ از طرف دیگر

$$\sin\frac{B-A}{2} = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \frac{B-A}{2}\right] = \cos\left[\frac{A+B+C}{2} - \frac{B-A}{2}\right] =$$

$$\cos\left(A + \frac{C}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(A + \frac{C}{2}\right) = n\cos\frac{C}{2}$$

۱۲۶– $\cot g OA'B = \frac{A'H}{r}$, $\cot g\frac{C}{2} = \frac{CH}{2}$, $\cot g\frac{B}{2} = \frac{BH}{r}$

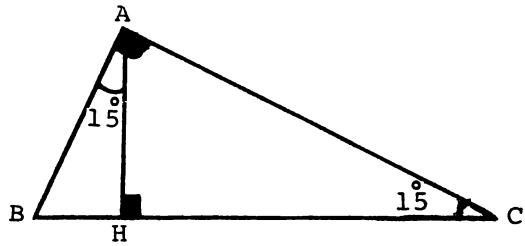
$$\cot g\frac{C}{2} - \cot g\frac{B}{2} = \frac{CH - BH}{r} = \frac{2A'H}{r} = 2\cot g OA'B$$



۱۲۷– $CH = AH.\cot g 15^\circ$, $BH = AH.tg 15^\circ$

$BC = AH(\cot g 15^\circ + tg 15^\circ) \Rightarrow$

$$BC = AH \times \frac{1}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2AH}{\sin 30^\circ} = 4AH$$



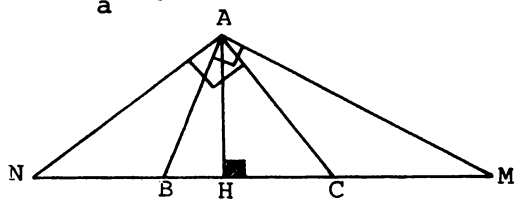
۱۲۸– بنا به فرض:

$\hat{N} + \hat{C} = 90^\circ$ و $\hat{B} + \hat{M} = 90^\circ$ از اینجا

$\cot g M = tg B$, $\cot g N = \cot g C$

حال اگر ارتفاع AH را رسم کنیم داریم:

$NH = h_a . tg C$, $MH = h_a . tg B$

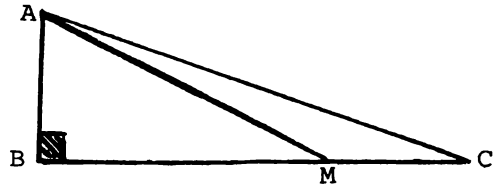


$$MN = h_a(tgB + tgC) = \frac{aSinBSinC}{SinA} \cdot \frac{Sin(B+C)}{CosB \cdot CosC} = atgBtgC$$

۱۲۹-

$$\left.\begin{array}{l} tgM = \frac{1}{2} \Rightarrow M = Arctg\ \frac{1}{2} \\ tgC = \frac{1}{3} \Rightarrow C = Arctg\ \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\hat{M} + \hat{C} = Arctg\frac{1}{2} + Arctg\frac{1}{3} = Arctg1 = \frac{\pi}{4}$$

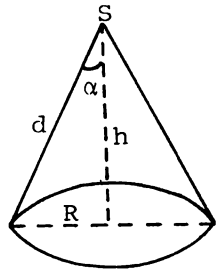


۱۳۰-

$$, R = d\ Sin\alpha\ ,\ h = dCos\alpha$$

$$V = \frac{1}{3}\pi hR^2 = \frac{\pi}{3}\ d^3 Cos\alpha Sin^2\alpha = (\text{مقدار ثابت}) \Rightarrow$$

$$, d^2 = \sqrt[3]{\frac{9V^2}{\pi^2 Sin^4\alpha\ Cos^2\alpha}} \qquad (۱)$$



$S = \pi Rd = \pi d^2 Sin\alpha$ باتوجه به رابطه (۱) داریم :

$$S = \pi Sin\alpha \sqrt[3]{\frac{9V^2}{\pi^2 Sin^4\alpha\ Cos^2\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{9\pi V^2}{Sin\alpha\ Cos^2\alpha}}$$

حال می‌دانیم که S وقتی مینیمم است که مخرج کسر یعنی ، $y = Sin\ Cos^2\alpha$ ماکزیمم باشد و برای محاسبه ماکزیمم y به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

$$y' = Cos^3\alpha - 2Sin^2\alpha Cos\alpha, y' = 0 \Rightarrow Cos\alpha(Cos^2\alpha - 2Sin^2\alpha) = 0$$

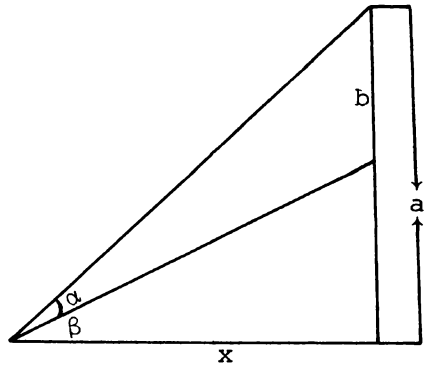
$$\Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow Cos\ \alpha \neq 0 \Rightarrow Cos^2\alpha - 2Sin^2\alpha = 0 \Rightarrow Cotg^2\alpha = 2$$

$$\Rightarrow \frac{h}{d} = Cotg\ \alpha = \sqrt{2}$$

۱۳۱-

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\mathrm{Arctg}\frac{a}{x}\\ \beta=\mathrm{Arctg}\frac{a-b}{x}\end{cases} \Rightarrow \alpha=\mathrm{Arctg}\frac{a}{x}-\mathrm{Arctg}\frac{a-b}{x}=\mathrm{Arctg}\frac{bx}{x^2+a(a-b)}$$

$$\Rightarrow \alpha=\mathrm{ArcCotg}\frac{x^2+a(a-b)}{bx}=\mathrm{ArcCotg}\left[\frac{1}{b}\times\left(x+\frac{a(a-b)}{x}\right)\right]$$



حال باتوجه به‌اینکه تابع ArcCotgp یک تابع نزولی است برای آنکه αماکزیمم باشد باید $x+\frac{a(a-b)}{x}$ مینیمم باشد و حاصل‌ضرب دو عبارتx و $\frac{a(a-b)}{x}$ مقدار ثابتی است پس برای مینیمم شدن $x+\frac{a(a-b)}{x}$ باید داشته باشیم:

$$x=\frac{a(a-b)}{x} \Rightarrow x^2=a(a-b) \Rightarrow x=\sqrt{a(a-b)}$$

۱۳۲- جواب اولی

$$\mathrm{Cos}A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2b^2-a^2}{2b^2}=1-\frac{a^2}{2b^2}=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

۱۳۳- جواب سومی

$$\mathrm{Sin}x-\mathrm{Sin}y=2\mathrm{Sin}\frac{x-y}{2}\ \mathrm{Cos}\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Cos}\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x+y=4k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \mathrm{Cos}(x+y)=-\frac{1}{2}$$

۱۳۴- جواب چهارمی

$$\mathrm{Sin}^2x\ \mathrm{Cos}x=\frac{1}{2}\ \mathrm{Sin}x\mathrm{Sin}2x \leqslant \frac{1}{2}$$

۱۳۵- جواب چهارمی

$$f(\mathrm{Cos}\varphi)=0 \Rightarrow 2\mathrm{Cos}^2\varphi-2\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Sin}\varphi-1=$$

$$\mathrm{Cos}2\varphi-\mathrm{Sin}2\varphi=0 \Rightarrow \mathrm{tg}2\varphi=1 \Rightarrow 2\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

۱۳۶ـ جواب سومی

$$tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + tgC = \frac{3}{20}\, tgC \Rightarrow$$

$$tgC = -1 \Rightarrow C = \frac{3\pi}{4}$$

۱۳۷ـ جواب اولی

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

۱۳۸ـ جواب دومی

$$tgA + tgC = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sin(A+C)}{\cos A \cos C} = 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\frac{2\sin(120^\circ)}{\cos 120^\circ + \cos(A-C)} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \cos(A-C) = 1$$

۱۳۹ـ جواب اولی

$$x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow f(x) = \sin^5 x + \sin^3 x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0 \end{cases}$$

و $f'(x) = 5\sin^4 x + 3\sin^2 x \geqslant 0$

باتوجه به‌اینکه مشتق تابع درفاصله $[0 \text{ و } \frac{\pi}{2}]$ ، مثبت است پس تابع $f(x)$ همواره صعودی است ، بنابراین در فاصله مزبور فقط یکبار می‌تواند برابر صفر شودتا $f(x)$ از منفی به مثبت تبدیل شود .

۱۴۰ـ جواب چهارمی

$$2\sin^2 x = \sin^2 y, b^2\cos^2 x = \cos^2 y \Rightarrow 2\sin^2 x + b^2\cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow (2 - b^2)\cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 - b^2 \geqslant 1 \Rightarrow b \leqslant 1$$

۱۴۱ـ جواب چهارمی

$$B - C = 90 \Rightarrow tgB = -\cot gC \Rightarrow tgB.tgC = -1, \sin B = \cos C$$

$$b = 2C \Rightarrow \sin B = 2\sin C \Rightarrow \cos C = 2\sin C \Rightarrow tgC = \frac{1}{2}$$

$$tgB = -2, tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC \Rightarrow tgA = \frac{3}{4}$$ و

۱۴۲ـ جواب دومی

$$\mathrm{Cotg}(157^\circ,30') - \mathrm{tg}(157^\circ,30') = 2\mathrm{Cotg}315^\circ = -2$$

۱۴۳ـ جواب سومی

$$\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$

$$1 + \mathrm{Sin}2x = \frac{8}{9} \Rightarrow \mathrm{Sin}2x = -\frac{1}{9}$$

۱۴۴ـ جواب چهارمی

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2x < \pi \Rightarrow \mathrm{Cotg}x > \mathrm{Cotg}2x$$

توجه دارید که در فاصله اول و دوم تابع Cotg پیوسته و نزولی است .

۱۴۵ـ جواب سومی

$$x < x^2 \Rightarrow x(1-x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$$ یا

توجه دارید که جواب $x > 1$ قابل قبول نیست زیرا تابع‌های $\mathrm{ArcSin}x$ و $\mathrm{ArcSin}x^2$ بی‌معنی می‌شوند .

۱۴۶ـ جواب سومی

$$2\mathrm{Sin}3x = m \Rightarrow -2 \leqslant m \leqslant 2$$

۱۴۷ـ جواب سومی

$$\mathrm{Arctg}x = \frac{5}{2} > \frac{\pi}{2}$$ قابل‌قبول نیست

۱۴۸ـ جواب اولی

$$x - y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{Cotg}y = -\mathrm{tg}x \Rightarrow \mathrm{tg}x\mathrm{Cotg}y = -\mathrm{tg}^2x = a < 0$$

۱۴۹ـ جواب چهارمی

$$\mathrm{Cos}3x - (m-1)\mathrm{Cos}x = 0 \Rightarrow \mathrm{Cos}x\,[4\mathrm{Cos}^2x - (m+2)] = 0$$

۱۵۰ـ جواب اولی

$$\mathrm{Sin}(x+y) = 0 \Rightarrow x + y = \pi \;,\; \mathrm{Sin}(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow$$

$$x = y = \frac{\pi}{2}$$

سؤالات کنکور سال ۶۶ ــ ۶۵

۱ ــ اگر مجموع دو زاویه ۱۰۰ گراد و یکی از دو زاویه ۳۶ درجه باشد دیگری چند گراد است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۰

۳) ۶۰ ۴) ۷۰

۲ ــ حاصل عبارت $2\cos\left(-\frac{125\pi}{4}\right)+3\,tg\left(\frac{125\pi}{4}\right)+4\,Cotg\left(-\frac{125}{4}\pi\right)$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}-1$ ۲) $-\sqrt{2}+1$

۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $\sqrt{2}+1$

۳ ــ اگر به ازای هر x ، $f(x)=|3\sin x+4\cos x|$ آنگاه بزرگترین مقدار f کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۴ ــ اگر $a=2\,Arc\,tg\,t$ ، آنگاه $\sin a$ کدام است؟

۱) $\frac{2t}{1-t^2}$ ۲) $\frac{2t}{1+t^2}$

۳) $\frac{1+t^2}{2t}$ ۴) $\frac{1-t^2}{2t}$

۵ ــ حاصل عبارت $\frac{4\cos 2x}{tgx+Cotgx}$ کدام است؟

۱) $\cos 4x$ ۲) $\sin 2x$

۳) $\sin 4x$ ۴) $\cos 2x$

۶ ــ اگر $tg(a-b)=\frac{3}{7}$ و $tg(a+b)=\frac{2}{5}$ ، $tg2a$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1

۳) ۱ ۴) ۲

۷ ــ اگر معادلهٔ $2\cos^2 x+2m\sin x\cos x=m$ دارای جواب باشد ، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}$ ۲) $-1\leqslant m\leqslant 1$

۳) $m\leqslant 0$ ۴) $m\geqslant 0$

۸ ــ دستگاه معادلات ، $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ \sin x\sin y=1 \end{cases}$ چند دسته جواب در فاصله [۰ و ۲π] دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۹ـ در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{A}BC$ ، $(A = \frac{\pi}{2})$ حاصل عبارت

$$\frac{\cos B + \cos C + \cos\frac{B+C}{2}}{\sin B + \sin C + \sin\frac{B+C}{2}}$$ ، کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) ۲

۱۰ـ در مثلث ABC حاصل عبارت ، $\frac{(b+c)^2 - a^2}{bc(\cos A + 1)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) $b-c$ ۴) bc

۱۱ـ در مثلثی ، $\cos A - \cos B = \sqrt{2}\sin\frac{A-B}{2}$ ، آن مثلث کدام‌است؟

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) متساوی‌الساقین

۳) قائم‌الزاویه ۴) مثلث غیرمشخص

۱۲ـ برای تعیین فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B که در دو طرف رودخانه‌ای قرار دارد نقطه C را در طرف A طوری اختیار می‌کنیم که $AC = ۳۰$ و $B\hat{A}C = \frac{\pi}{12}$ و $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$ ، طول AB کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۳}$ ۲) $۱۰\sqrt{۶}$

۳) $۲۰\sqrt{۳}$ ۴) $۲۰\sqrt{۶}$

راهنمای سؤالات ٦٦ ــ ٦٥

۱ــ جواب سومی

$\frac{10}{9} \times 36^\circ = 40^{\text{گراد}} \Rightarrow \quad 100 - 40 = 60^{\text{گراد}}$

۲ــ جواب اولی

$\cos(-\frac{125\pi}{4}) = \cos(-\frac{125\pi}{4} + 30\pi)$

$= \cos(\frac{-5\pi}{4}) = \cos\frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$tg\frac{125\pi}{4} = tg\frac{5\pi}{4} = 1 \quad , Cotg(-\frac{125\pi}{4}) = -1$

۳ــ جواب دومی

$|3\sin x + 4\cos x| \leqslant \sqrt{9+16} = 5$

۴ــ جواب دومی

$Arctgt = \varphi \Rightarrow tg\,\varphi = t \quad , \sin 2\varphi = \frac{2tg\,\varphi}{1 + tg^2\varphi}$

$= \frac{2t}{1+t^2}$

۵ــ جواب سومی

$tg\,x + Cotg\,x = \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow \frac{4\cos 2x}{tg\,x + Cotg\,x} = \sin 4x$

۶ــ جواب سومی

$2a = (a+b) + (a-b) \Rightarrow$

$tg\,2a = tg\,[(a+b) + (a-b)] = 1$

۷ــ جواب چهارمی

$2\cos^2 x + 2m\,\sin x\cos x = m \Rightarrow$

$m\sin 2x + \cos 2x = m-1 \Rightarrow m^2 + 1 \geqslant (m-1)^2 \Rightarrow \quad m \geqslant 0$

۸ــ جواب اولی

$x + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin y = \cos x \Rightarrow$

$\sin x \sin y = \sin x\cos x \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = 1$ جواب ندارد

۹ــ جواب سومی

$B + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos B = \sin C \quad , \cos C = \sin B,$

$\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{B+C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۰ــ جواب دومی

$(b+c)^2 - a^2 = b^2 + c^2 - a^2 + 2bc = 2bc\cos A + 2bc \Rightarrow$

$2bc(\cos A + 1)$

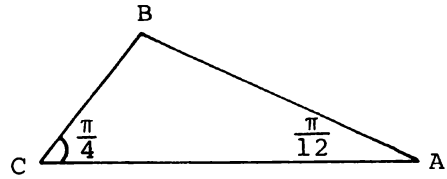
۱۱ـ جواب دومی

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{A-B}{2} \Rightarrow$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\left(2\sin\frac{A+B}{2} + \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin\frac{A-B}{2} = 0 \Rightarrow A = B$$

۱۲ـ جواب دومی

$$B = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\pi}{3}$$



$$\frac{30}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{AB}{\sin\frac{\pi}{4}} \Rightarrow AB = 10\sqrt{6}$$

سؤالات سال ۶۷ ـ ۶۶

۱ـ $\sin 2\alpha > 0$ و $\cos\alpha \, tg\,\alpha < 0$ آنگاه انتهای α درکدام ناحیه‌مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم

۳) سوم ۴) چهارم

۲ـ اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ و $\cos 2\alpha = \frac{1}{1-m}$ آنگاه حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $]-\infty, 2[$ ۲) $]1, \infty[$

۳) $]2, \infty[$ ۴) $]-\infty, 1[$

۳ـ حاصل عبارت

$$\sin[\operatorname{ArcCotg}\sqrt{3}] + \sin[\operatorname{Arc}tg(1) + \operatorname{Arc}\sin(\frac{\sqrt{2}}{2})]$$

برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\sqrt{3}+1$ ۴) $\frac{3}{2}$

۴ـ اگر $\alpha+\beta = \frac{5\pi}{4}$ آنگاه حاصل عبارت، $(1+tg\alpha)(1+tg\beta)$ برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

۵ ـ حدود تغییرات α در فاصله $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ برای اینکه معادله،

$$\sqrt{2}\cos x + \sin x = tg\,\alpha$$

دارای جواب باشد، برابر کدام است؟

۱) $\frac{-\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{-\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{6}$

۳) $\frac{-\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$ ۴) $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$

۶ـ در مثلث ABC، اگر $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$ آنگاه زاویه C برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۷ـ یک دوره تناوب تابع $f(x)=\sin^2 \frac{\pi}{3} x + \sin \pi x$ برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

۸ـ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ($A = 90^\circ$) حاصل عبارت $\frac{1+\cos 2C}{\sin 2B}$ برابر کدام است؟

۱) $\cos C$ ۲) $\cot g C$

۳) $\sin C$ ۴) $tg C$

۹ـ وارون تابع $y=\sin x - 2$ کدام است؟

۱) $y = 2\arcsin x$ ۲) $y = -2\arcsin x$

۳) $y = \arcsin(x-2)$ ۴) $y = \arcsin(x+2)$

۱۰ـ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، طول دو ضلع زاویه قائمه ۳ و $\sqrt{3}$ می‌باشد ، شعاع دایره محیطی مثلث چقدر است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{4}$

۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

راهنمای تست سال ۶۷ ــ ۶۶

۱ــ جواب سومی زیرا $2\sin\alpha.\cos\alpha > 0,\ \cos\alpha.\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0 \Rightarrow$

$\sin\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

۲ــ جواب سومی زیرا: $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < 2\alpha < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$-1 \leqslant \cos 2\alpha < 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-m} < 0 \\ \dfrac{1}{1-m} \geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 1 \text{ یا } m \geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow m \geqslant 2$$

۳ــ جواب چهارمی زیرا: $\sin(\dfrac{\pi}{6}) + \sin(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$

۴ــ جواب سومی زیرا: $tg(\alpha+\beta) = 1 \Rightarrow \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\alpha\ tg\beta} = 1 \Rightarrow$

$tg\,\alpha + tg\,\beta = 1 - tg\alpha\, tg\beta \Rightarrow (1 + tg\alpha)(1 + tg\beta) = 2$

۵ــ جواب سومی زیرا: $c^2 \leqslant a^2 + b^2 \Rightarrow tg^2\alpha \leqslant 3 \Rightarrow$

$-\sqrt{3} \leqslant tg\alpha \leqslant \sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{-\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{3}$

۶ــ جواب سومی زیرا: $(a+b)^2 - c^2 = 3ab \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - ab \Rightarrow$

$\cos C = \dfrac{1}{2} \Rightarrow C = \dfrac{\pi}{3}$

۷ــ جواب چهارمی زیرا: $T_1 = \pi : \dfrac{\pi}{3} = 3\ ,\ T_2 = 2\pi : \pi = 2 \Rightarrow T = 6$

۸ــ جواب دومی: $C + B = 90^\circ \Rightarrow \cos C = \sin B,\ \sin C = \cos B$

$$\frac{1 + \cos 2C}{\sin 2B} = \frac{2\cos^2 C}{2\sin B.\cos B} = \frac{\cos C}{\cos B} = \frac{\cos C}{\sin C} = \cot g C$$

۹ــ جواب چهارمی $\sin x = y + 2 \Rightarrow x = \text{Arc}\sin(y+2) \Rightarrow$

$y = \text{Arc Sin}(x + 2)$

۱۰ـ جواب سومی

$A = 90^\circ \ , \ C = \sqrt{3} \ , \ b = 3 \Rightarrow tgC = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$C = \frac{a}{2} = \frac{2R}{2} \Rightarrow R = \sqrt{3}$

هیأت مؤلفان

علی حسن زاده ماکوئی
علی اکبر جعفری
احمد فیروزنیا
علی اکبر جعفری

AR

دنباله‌ها

مفهوم دنباله: با مجموعه اعداد طبیعی آشنائی کامل دارید. این مجموعه عبارتست از:

$N=\{1,2,3,4,5,\ldots\ldots,n,n+1,\ldots\ldots\}$

ملاحظه می‌کنید که این مجموعه نامتناهی است و از طرف پایین محدود است یعنی کوچکترین عدد طبیعی مشخص است. اما از طرف بالا محدود نیست. به عبارت دیگر بزرگترین عدد طبیعی مشخص نیست. اگر اعضاء مجموعهٔ N را با همان ترتیب که نوشته‌ایم در نظر بگیریم دنباله‌ای از اعداد با ترتیب معین خواهیم داشت که به آن دنباله عددهای طبیعی می‌گوئیم.

جمله اول این دنباله ۱ و جمله دوم آن ۲ و جملهٔ دهم آن ۱۰ و بالاخره جملهٔ n ام آن n است. اگر جملهٔ n ام دنباله را a_n بنامیم خواهیم داشت:

$$\boxed{a_n = n}$$

a_n را جملهٔ عمومی دنباله می‌نامیم. اگر در جملهٔ عمومی n را برابر ۱، ۲، ۳، ۱۰ و ۲۵ بگیریم به ترتیب جملات اول، دوم، سوم، دهم و بیست و پنجم دنباله به‌دست می‌آید.

سؤال: بین مجموعه اعداد طبیعی و دنبالهٔ اعداد طبیعی چه فرقی هست؟

اکنون دنباله را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف دنباله: به مجموعه‌ای از اعداد که چنان مرتب شده باشند که با دنباله عددهای طبیعی یا بخشی از آن در تناظر یک‌به‌یک باشند دنباله گوئیم. عددهای دنباله را جمله‌های دنباله گوئیم. جمله اول متناظر با ۱ و جمله دوم متناظر با ۲ و جملهٔ سوم متناظر با ۳ و ... و جملهٔ K ام متناظر با عدد طبیعی K خواهد بود.

نمایش دنباله: معمولاً برای نمایش دنباله‌ای از اعداد حرفی مانند u را انتخاب کرده

و مرتبه هر جمله را به‌صورت اندیسی برآن حرف به کار می‌بریم (حرف را نمره‌دار می‌کنیم)

$\{u_n\} = \{u_1 , u_2 , u_3 , \ldots\ldots , u_n , \ldots\}$

مثال ۱: دنباله عددهای منفی:

$\{-1 \text{ و } -2 \text{ و } -3 \text{ و } -4 \text{ و } \ldots , -n , \ldots\}$

ملاحظه می‌کنید که $u_n = -n$ در واقع u تابعی است از N به R با ضابطهٔ $u_n = -n$

$u : N \longrightarrow R$

$u_n = -n$

$u_1 = -1 , u_2 = -2 , \ldots\ldots , u_{17} = -17 , \ldots$

مثال ۲: دنباله عددهای طبیعی فرد:

$\{1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } \ldots , 2n-1 , \ldots\}$

که در آن $u_n = 2n-1$

سؤال: بیست‌وچهارمین عدد فرد کدام است؟

جواب: $u_{۲۴} = ۲(۲۴) - ۱ = ۴۷$

مثال ۳: دنباله عددهای طبیعی که مضرب ۳ باشند:

$\{3 \text{ و } 6 \text{ و } 9 \text{ و } 12 \text{ و } \ldots , 3n , \ldots\}$

طرزتشکیل دنباله: یکی از راههای تشکیل دنباله آن است که جملهٔ عمومی آن معلوم باشد.

مثال ٤: دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $u_n = \frac{n}{n+1}$ بنویسید:

$u_1 = \frac{1}{2} , u_2 = \frac{2}{3} , u_3 = \frac{3}{4} , u_4 = \frac{4}{5} , \ldots$

$\{\frac{1}{2} , \frac{2}{3} , \frac{3}{4} , \frac{4}{5} , \ldots\ldots , \frac{n}{n+1} , \ldots\ldots\}$

مثال ۵: دنباله‌ای بنویسید که در آن $u_1=1 , u_2=1 , u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$

$u_1=1 , u_2=1 , u_3=u_2+u_1=2 , u_4=u_3+u_2=3$

دنباله فیبوناتچی $\{۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۸ و ۱۳ و ۲۱ و ۳۴ و \cdots\}$

تمرین: جملهٔ عمومی هر کدام از دنباله‌های زیر را با تجسس پیدا کنید:

$\{۲ و ۵ و ۱۰ و ۱۷ و ۲۶ و ۳۷ و ۵۰ و ۶۵ و ۸۲ و \cdots\}$

$\{\frac{۱}{۳} و \frac{۱}{۸} و \frac{۱}{۱۵} و \frac{۱}{۲۴} و \frac{۱}{۳۵} و \frac{۱}{۴۸} و \frac{۱}{۶۳} و \cdots\}$

$\{۳ و ۷ و ۱۵ و ۳۱ و ۶۳ و ۱۲۷ و \cdots\}$

مثال۶: اگر $u_n = \frac{n^2 + 2n}{3}$ معلوم کنید چندمین جملهٔ دنباله برابر ۱۶ می‌شود؟

$u_n = 16 \Rightarrow n = ?$

$\frac{n^2+2n}{3} = 16 \Rightarrow n^2 + 2n - ۴۸ = ۰ \quad \begin{cases} n = -۸ & \text{قابل قبول نیست} \\ n = ۶ \end{cases}$

ششمین جملهٔ این دنباله برابر ۱۶ می‌شود.

$u_6 = \frac{(۶)^۲ + ۲(۶)}{۳} = \frac{۳۶+۱۲}{۳} = ۱۶$

تمرین: آیا جمله‌ای از دنباله اخیر وجود دارد که مساوی ۲۰ گردد. چرا؟

در برنامهٔ دبیرستان با دو دنباله بسیار مشهور و مهم سروکار داریم که عبارتنداز: تصاعد حسابی (عددی) و تصاعد هندسی که در بخشهای آینده به تفصیل مورد بحث قرار می‌دهیم.

دنباله محدود: دنباله‌ای را گوئیم که با بخشی محدود از اعداد طبیعی در تناظر یک به یک باشد.

مثال۷: دنباله مضربهای دو رقمی ۹

$\{۱۸ و ۲۷ و ۳۶ و ۵۴ و ۶۳ و ۷۲ و ۸۱ و ۹۰ و ۹۹\}$

دنباله صعودی: هرگاه هر جمله دنباله از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از جملهٔ ماقبل باشد آن دنباله را صعودی می‌نامیم:

$\forall n \in N ; \ |u_{n+1}| > |u_n| \Longleftrightarrow$ دنباله صعودی است

دقت کنید: در مثال ۵، جملهٔ عمومی با جملات قبل از خودش رابطهٔ زیر را دارد:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

چنین روابطی را رابطهٔ برگشت می‌نامیم. ملاحظه می‌کنید که محاسبهٔ هر جمله برمی‌گردد به محاسبه جملات قبل از خودش و حال آنکه در مثال اول از روی جملهٔ عمومی هر جملــه مستقیما" محاسبه می‌شود.

تذکر: همواره نمی‌توانیم جملهٔ عمومی دنباله‌را با ضابطه‌ای مشخص بنویسیم.

مثال ۸: دنبالهٔ اعداد اول، جملهٔ عمومی ندارد. تاکنون فرمولی برای تعیین اعداد اول معین نشده است.

{۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ۱۹ و ۲۳ و ...}

مثال ۹: دنباله ارقام اعشاری عدد π

$\pi \simeq$ ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵ ...

{۱ و ۴ و ۱ و ۵ و ۹ و ۲ و ۶ و ۵ و ۳ و ۵ و ...}

تعیین جملهٔ عمومی دنباله، هنگامی که چندین جملهٔ آن معلومست: گاهی از اوقات (و نه همیشه) از روی جملات یک دنباله می‌توانیم جملهٔ عمومی آن را استنباط کرده و یا با جستجو آن را پیدا می‌کنیم:

مثال ۱۰: جملهٔ عمومی دنباله زیر را پیدا کنید:

$\{ \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۱۲}$ و $\frac{۱}{۲۰}$ و $\frac{۱}{۳۰}$ و ...$\}$

$u_1 = \frac{۱}{۱\times۲} \qquad u_2 = \frac{۱}{۲\times۳} \qquad u_3 = \frac{۱}{۳\times۴} \qquad u_4 = \frac{۱}{۴\times۵} \qquad u_5 = \frac{۱}{۵\times۶}$

بنابراین $u_{10} = \frac{۱}{۱۰\times۱۱}$ و $u_{27} = \frac{۱}{۲۷\times۲۸}$ و سرانجام:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

دنباله نزولی: هرگاه هر جملهٔ دنباله از لحاظ قدرمطلق کوچکتر از جملهٔ ماقبل خود باشد، آن دنباله را نزولی می‌نامیم:

$\forall n \in N, \ |u_{n+1}| < |u_n| \iff$ دنباله نزولی است

مثال ۱۱: دنبالهٔ: $\{۳ و ۵ و ۷ و ۹ و ۱۱ و ۱۳ و ... \}$
صعودیست چرا ؟

مثال ۱۲: دنباله: $\{ \frac{۱}{۳} و \frac{۱}{۹} و \frac{۱}{۲۷} و \frac{۱}{۸۱} و ... \}$
نزولیست چرا ؟

برخی از مؤلفین در تعریف صعودی بودن یا نزولی بودن یک دنباله قدرمطلق جمله‌ها را در نظر نمی‌گیرند بلکه خود جمله‌ها مطمح نظرشان است .

مثال ۱۳: دنبالهٔ $\{ (-۷) و -۴ و -۱ و ۲ و ۵ و ۸ و ۱۱ و ... \}$
طبق تعریف اول گاهی نزولی و گاهی صعودیست اما اگر خود جملات را مقایسه کنیم :

$-۷ < -۴ < -۱ < ۲ < ۵ < ۸ < ۱۱$

مشاهده می‌شود که هر جمله از جملهٔ مقابل خود بزرگتر است لذا آن را صعودی می‌گیریم .

تصاعد حسابی (عددی)

۱ــ تعریف: تصاعدحسابی به‌دنباله‌ٔ اعدادی گویند که هر جمله آن مساوی جمله قبلی به اضافه مقدار ثابتی باشد. مقدار ثابت را قدرنسبت تصاعد گویند. اگر قدر نسبت مثبت باشد تصاعد را صعودی و اگر منفی باشد تصاعد را نزولی می‌نامند.

در هر تصاعد حسابی، جمله اول را با a_1، قدر نسبت را با d، تعداد جملات را با n و جملهٔ مرتبهٔ n ام را با a_n نمایش می‌دهیم.

صعودی: $a_1 = ۲$ و $d = ۳$ ... و ۱۴ و ۱۱ و ۸ و ۵ و ۲ ÷

نزولی: $a_1 = ۹$ و $d = -۴$ ... و ۷- و ۳- و ۱ و ۵ و ۹ ÷

۲ــ جمله عمومی تصاعد حسابی: جملهٔ nام هر تصاعد را جملهٔ عمومی آن می‌نامند وبا قرار دادن شمارهٔ هر جمله به جای n، مقدار آن جمله از روی جمله عمومی محاسبه می‌شود.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

مثال ۱: جمله هفتم تصاعد حسابی ... و ۸ و ۵ و ۲ کدامست؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۱

۳) ۲۰ ۴) ۱۹

$a_1 = ۲$ و $d = ۳$ و $n = ۷$ $\Longrightarrow$ $a_7 = ۲+(۷-۱)(۳) = ۲۰$

مثال ۲: جملهٔ n ام (جمله عمومی) تصاعد حسابی ... و ۱۳ و ۵ و ۹ کدامست؟

۱) $۴n+۵$ ۲) $۱۳+۴n$

۳) $۴n-۵$ ۴) $۱۳-۴n$

$a_1 = ۹$ و $d = -۴$ ، $n = n$ $\Longrightarrow$ $a_n = ۹+(n-۱)(-۴) = ۱۳-۴n$

مثال ۳: جملهٔ n ام یک‌تصاعدحسابی $a_n = ۲n + ۳$ است. حاصلضرب جملهٔ سوم و چهارم آن را پیدا کنید.

$a_n = 2n + 3$

$a_3 = 2(3)+3=9 \quad , \quad a_4=2(4)+3=11 \implies a_3 \cdot a_4 = 9 \cdot 11 = 99$

مثال ٤: سی و پنجمین عدد فرد مثبت کدامست؟

۱) ۳۵ ۲) ۷۱

۳) ۶۹ ۴) ۷۰

جواب: اعداد فرد تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت ۲ می‌دهند:

۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ...

$a_1=1 \quad , \quad d=2 \quad , \quad n=35 \implies a_{35} = ۱ + (۳۵-۱)(۲) = ۶۹$

به‌طورکلی: n امین عدد فرد مثبت برابر است با: $۲n-۱$ (جملهٔ عمومی) چرا؟

۲ــ مسئلهٔ مهم: بین دو عدد a و b، m واسطه حسابی درج کنید.

معنی مسئله این است که تصاعد حسابی بنویسیم که جمله اولش a و جمله nام آن b و تعداد جملاتش $n=m+۲$ باشد. به‌عبارت‌دیگر بین a و b، m عدد دیگر به‌گونه‌ای قرار دهیم که با این دو عدد تشکیل تصاعد حسابی بدهند.

a, ... , ... , ... , ... , ... , b

$a_1 = a \quad , \quad a_n = b \quad , \quad n = m+2 \quad , \quad d=?$

$b = a + (m+2-1)d \implies d = \frac{b-a}{m+1}$

با یافتن قدر نسبت، تصاعد مشخص می‌شود.

مثال ۵: بین دو عدد ۴ و ۲۸، ۵ واسطه حسابی درج کنید:

$d = \frac{b-a}{m+1} = \frac{۲۸-۴}{۵+۱} = \frac{۲۴}{۶} = ۴$

۴، ۸، ۱۲، ۱۶، ۲۰، ۲۴، ۲۸

۳ــ واسطه حسابی بین a و b: اگرسه‌عدد a و c و b تشکیل تصاعد حسابی بدهند یعنی رشتهٔ b و c و a تصاعد حسابی باشد به c واسطه حسابی بین a و b گوئیم. درواقع بین a و b یک واسطه حسابی درج کرده‌ایم و داریم:

$2c = a + b$ یا $c = \frac{a+b}{2}$

مثال ۶: اگر $2k-1$ واسطه حسابی بین $3k-1$ و ۴ باشد، k برابر است با:

۱) ۵ ۲) $\frac{5}{7}$

۳) $\frac{5}{4}$ ۴) ۴

$$2(2k-1)=4+(3k-1) \Longrightarrow 4k-2=4+3k-1 \Longrightarrow k=5$$

گزینه (۱) درست است.

مثال ۷: اگر a_m و a_n و a_p و a_q جمله‌های یک تصاعد حسابی باشند ثابت کنید:

$$m+n=p+q \Longleftrightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$$

$$a_m=a_1+(m-1)d \qquad (1)$$

$$a_n=a_1+(n-1)d \qquad (2)$$

اگر طرفین روابط (۱) و (۲) را باهم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$a_m+a_n=2a_1+(m+n-2)d$$

در رابطهٔ اخیر بنابرفرض به جای $m+n$ مساویش $p+q$ را قرار می‌دهیم:

$$a_m+a_n=2a_1+(p+q-2)d$$

و می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$a_m+a_n=a_1+(p-1)d+a_1+(q-1)d$$

$$a_m+a_n=a_p+a_q$$

اثبات عکس را به عهدهٔ خوانندگان می گذاریم.

مثال ۸: اگر جملهٔ m ام یک تصاعد حسابی a_m و جملهٔ n ام آن a_n باشد، آنگاه جمله $\frac{m+n}{2}$ ام آن (به شرط وجود) برابر $\frac{a_m+a_n}{2}$ خواهد بود.

$$a_{\frac{m+n}{2}}=a_1+\left(\frac{m+n}{2}-1\right)d=\frac{2a_1+(m+n-2)d}{2}$$

$$a_{\frac{m+n}{2}}=\frac{a_1+(m-1)d+a_1+(n-1)d}{2}=\frac{a_m+a_n}{2}$$

مثال ۹: جملات هفتم و سیزدهم یک تصاعد حسابی ۸ و ۱۲ است. جملهٔ نوزدهم آن کدام است؟

$a_7=8 \qquad a_{13}=12 \qquad a_{19}=?$

$$m=7 \;,\; n=19 \;,\; \frac{m+n}{2}=13 \Rightarrow a_{13}=\frac{a_7+a_{19}}{2} \Rightarrow$$

$$2\times 12 = 8 + a_{19} \Rightarrow a_{19}=16$$

مثال ۱۰: جملهٔ بیستم یک تصاعد حسابی ۱۴ و جملهٔ سی‌ام آن ۲۶ است. جملهٔ بیست‌و پنجم آن کدامست؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۷/۶

۳) ۴۰ ۴) هیچکدام

راه اول:

$$\begin{cases} a_{20}=a_1+19d \\ a_{30}=a_1+29d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1+19d=14 \\ a_1+29d=26 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1=-8/8 \\ d=1/2 \end{cases}$$

$$a_{25}=a_1+24d=-8/8+24(1/2)=20$$

راه دوّم:

اگر تعدادی جملهٔ متوالی از یک تصاعد حسابی را در نظر بگیریم، این جملات خودشان تشکیل یک‌تصاعدحسابی‌می‌دهند. لذا از جمله بیستم تاسی‌ام این تصاعدخودشان تصاعد حسابی با همان قدر نسبت می‌سازند:

۲۶ و ... و ... و .... و ۱۴

$a_1=14$ و $a_{11}=26$ $n=11$ چرا؟ $d=\frac{26-14}{11-1}=1/2$

جملهٔ ششم این تصاعد برابر است با: $a_6=14+5(1/2)=20$

راه سوم:

همانند مثال ۴ عمل می‌کنیم:

$$25=\frac{30+20}{2} \Rightarrow a_{25}=\frac{a_{30}+a_{20}}{2} \Rightarrow a_{25}=\frac{26+14}{2}=20$$

تمرین: جمله دهم یک تصاعدحسابی۱۵ و جمله پانزدهم آن ۱۰ است. جمله بیست و پنجم آن را پیدا کنید.

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{5}{2}$

۳) ۰ ۴) -5

مثال۱۱: اگر سه زاویهٔ A و B و C از مثلث ABC به ترتیب تشکیل تصاعد حسابی

بدهند، B برابر است با:

۱) 30° ۲) 45°

۳) 60° ۴) 90°

$$\begin{cases} A + B + C = 180^\circ \\ 2B = A + C \end{cases} \Rightarrow 3B = 180^\circ \Rightarrow B = 60^\circ$$

۴ــقضیه: در هر تصاعد حسابی، مجموع دو جمله که از طرفین به یک فاصله باشند، برابر است با مجموع جملهٔ اول و جمله آخر تصاعد. و اگر تعداد جملات فرد باشد، برابر است با دو برابر جملهٔ وسط.

مثال: ۲۶ و ۲۳ و ۲۰ و ۱۷ و ۱۴ و ۱۱ و ۸ و ۵ و ۲

$8 + 20 = 2 + 26 = 2 \times 14$

اثبات در حالت کلی. تصاعد زیر را در نظر می‌گیریم

$a_1 , a_2 , \ldots \alpha , \gamma , \beta , \ldots , a_{n-1} , a_n$

فرض می‌کنیم m جمله قبل از α و m جمله نیز بعداز β موجود باشد. اگر قدر نسبت این تصاعد d فرض شود، خواهیم داشت:

$\alpha = a_1 + md \qquad (1)$

اکنون اگر جملات تصاعد را از آخر به اول بنویسیم، تصاعد دیگری با قدر نسبت (-d) حاصل می‌شود:

$a_n , a_{n-1} , \ldots , \beta , \ldots \gamma . , \alpha , \ldots , a_2 , a_1$

در این تصاعد نیز β جمله m+۱ ام است و خواهیم داشت:

$\beta = a_n + m(-d)$

$\beta = a_n - md \qquad (2)$

از جمع روابط (۱) و (۲) داریم:

$\alpha + \beta = a_1 + md + a_n - md$

$\alpha + \beta = a_1 + a_n$

و اگر γ جمله وسط باشد. γ واسطه حسابی است بین دو جملهٔ طرفینش و بنا به‌قضیه مجموع دو جمله طرفین γ برابر است با جمله اول به‌علاوهٔ جمله آخر و درنتیجه

$\alpha + \beta = a_1 + a_n = 2\gamma$

مثال ۱۲: عده‌ای وارد باغی شدند و به ترتیب ورودشان به‌باغ سیب چیدند. یعنی نفر

اول یک سیب و نفر دوم دو سیب و نفر سوم سه سیب و . . . آنگاه سیبها را روی هم ریخته و به تساوی بین خود تقسیم کردند. به هر کدامشان ۱۵ سیب رسید. چند نفر وارد باغ شده‌اند؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

راه اول:

می‌توانیم چنین استدلال کنیم: نفر اول یک سیب چیده و در نهایت صاحب ۱۵ سیب شده است. پس ۱۴ سیب اضافی را از آخرین نفر دریافت خواهد کرد. لذا آخرین فرد باید ۲۹ سیب چیده باشد تا ۱۵ سیب برای خودش بماند و ۱۴ سیب به‌اولی بدهد یعنی ۲۹ نفر وارد باغ شده‌اند. نفر دوم که دو سیب چیده است ۱۳ سیب بقیه‌را از نفر بیست و هشتم دریافت می‌کند و . . .

۲۹ و ۲۸ و ۲۷ و . . . و ۳ و ۲ و ۱

راه دوّم:

می‌توانیم تصاعد حسابی n و . . . و۳و۲و۱ را در نظر بگیریم. در این تصاعد جملهٔ وسط وجود داشته و برابر ۱۵ است یعنی فردی وجود دارد که نه سیب به‌کسی داده و نه از کسی سیب گرفته است و این شخص نفر پانزدهم است بنابراین:

$1 + n = 2 \times 15$

$n = 29$

۵ ــ محاسبه مجموع n جمله از یک تصاعد حسابی:

فرمول اول: $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$

فرمول دوم: $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

مثال ۱۳: مجموع اعداد دورقمی که باقیمانده هر کدام بر ۴ برابر ۲ است کدامست؟

۱) ۱۴۲۴ ۲) ۲۱۴۲

۳) ۱۲۲۴ ۴) ۱۲۴۲

این اعداد یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند:

۹۸ و . . . و ۲۲ و ۱۸ و ۱۴ و ۱۰

$a_1 = 10 \ , \ a_n = 98 \ , \ d = 4 \ , \ n = ? \ , \ S = ?$

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 98 = 10 + (n-1)(4) \Rightarrow 98 = 4n + 6 \Rightarrow n = 23$

$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{23}{2} (10+98) = 23 \times 54 = 1242$

مثال ۱۴: مجموع اعداد از ۱ تا n برابر است با:

۱) $n(n-1)$ ۲) $n(n+1)$

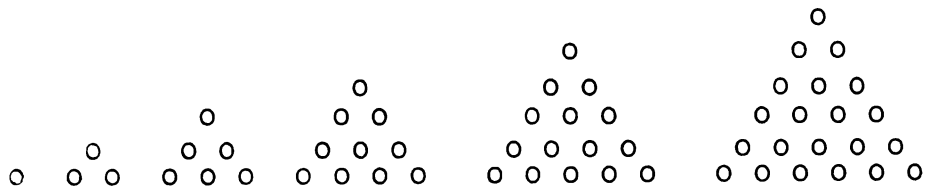
۳) $n(n-1)$ ۴) $\frac{n(n+1)}{2}$

$1,2,3,\ldots,n \qquad a_1 = 1 \quad d=1 \ , \ n=n \ , \ a_n = n$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

تبصره: فرمول $\frac{n(n+1)}{2}$ ، اعداد مثلثی را نتیجه می‌دهد:

n = ۱	n = ۲	n = ۳	n= ۴	n = ۵	n = ۶
۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱



مثال۱۵: دهمین عدد مثلثی کدامست؟ با این عدد مثلثی متساوی‌الاضلاع ساخته می‌شود. گلوله‌های اطراف این مثلث چندتا است؟

$$\frac{۱۰(۱۰+۱)}{۲} = ۵۵$$

گلوله‌های اطراف آن ۲۷ = ۳− (۱۰×۳) است.

توجه کنید! برای پاسخگوئی به مثال ۱۱ همین بخش راه حل سومی به شرح زیر می‌توانیم ارائه دهیم.

فرض کنیم n نفر وارد باغ شده‌اند. بنابراین دنباله زیر را می‌نویسیم:

۱ و ۲ و ۳ و . . . و

از یک طرف مجموع جملات این دنباله $\frac{(n+۱)}{۲}$ و از طرف دیگر n ۱۵ است. چرا؟

لذا داریم:

$$\frac{n(n+۱)}{۲} = ۱۵n \implies n(n+۱) = ۳۰n \quad , \quad n \neq ۰$$

$$\implies n+۱ = ۳۰ \implies n = ۲۹$$

مثال۱۶: مجموع اعداد فرد از ۱ تا ۱− ۲n کدامست؟

۱) $n^۲$ ۲) $n^۲-1$

۳) $\frac{n(2n-1)}{2}$ ۴) $\frac{n(2n+1)}{2}$

قبلا" دیدیم که n امین عدد فرد مثبت $2n-1$ است. در واقع در این مسئله مجموع n عدد فرد اولیه خواسته شده است.

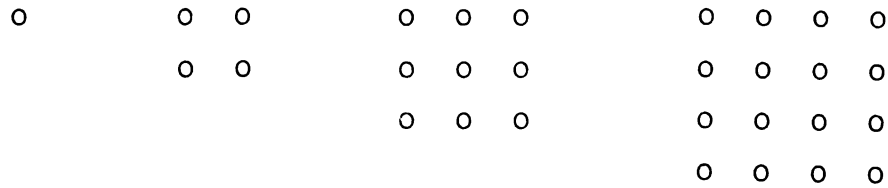
۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ... و $2n-1$

$S_n = ?$ $a_1 = 1$, $d = 2$, $n = n$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2+(n-1)(2)] = n^2$$

تبصره: فرمول n^2 اعداد مربعی را نتیجه می‌دهد.

n = ۱	n = ۲	n = ۳	n = ۴	n = ۵
۱	۴	۹	۱۶	۲۵



سئوال: کوچکترین عدد مثبت که هم مثلثی و هم مربعی باشد کدامست؟ (آن عدد مخالف ۱ گرفته شود).

هر دو رشته را ادامه دهید. در هر دو ۳۶ ظاهر می‌شود. جواب: ۳۶

مثال ۱۷: مجموع n جمله از یک تصاعد حسابی n^2+n است. جمله پنجم این تصاعد کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۰

۳) ۱۰ ۴) هیچکدام

$$S_n = n^2 + n \begin{cases} S_5 = 25+5 = 30 \\ S_4 = 16+4 = 20 \end{cases} \Rightarrow a_5 = S_5 - S_4 = 30-20 = 10$$

مثال ۱۸: بین دو عدد ۱۲ و ۲۴۶ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۱) ۲۳۵ ۲) ۲۳۴

۳) ۲۳۳ ۴) ۲۳۶

$n = ?$ و $a_n = 246$ و $d = 1$ و $a_1 = 12$ ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ... و ۲۴۶

۲۴۶=۱۲+(n−۱)(۱) ⇒ n=(۲۴۶−۱۲)+۱=۲۳۵ ⇒ اعداد بین =۲۳۵−۲=۲۳۳

حالت کلی: بین دو عدد صحیح a و b چند عدد صحیح وجود دارد؟ $(a<b)$

چرا؟ جواب: $b-a+1$

مثال۱۹: در تصاعد حسابی ۲، ۵، ۸، ... اولا" مطلوبست اولین جمله‌ای از تصاعد، که از هزار بزرگتر است. ثانیا" از چه مرتبه‌ای به بعد جمل تصاعد از ۹۰۰۰ بزرگتر خواهند بود.

$a = 2 \qquad d = 3 \qquad n = n$

باید داشته باشیم: $a_n > ۱۰۰۰ \implies ۲ + (n-۱)(۳) > ۱۰۰۰$

$۲+۳n-۳ > ۱۰۰۰ \implies ۳n > ۱۰۰۱ \implies n > ۳۳۳/۶$

پس اولین جملهٔ بزرگتر از ۱۰۰۰، جملهٔ ردیف ۳۳۴ام است.

$a_{۳۳۴} = ۲ + ۳۳۳ \times ۳ = ۲ + ۹۹۹ = ۱۰۰۱$

ثانیا": $a_n > ۹۰۰۰ \implies ۲+(n-۱)\times ۳ > ۹۰۰۰$

$3n > ۹۰۰۱ \implies n > ۳۰۰۰/۳$

جملات ردیف از ۳۰۰۱ به بعد همگی از ۹۰۰۰ بزرگتر خواهند بود.

مثال ۲۰: در یک تصاعد حسابی که ۲۰ جمله دارد، مجموع سه جمله اول آن ۲۵ و مجموع سه جملهٔ آخر آن ۱۲۵ است. مجموع جملات این تصاعد کدامست؟

۱) ۳۰۰۰ ۲) ۱۵۰۰

۳) ۵۰۰ ۴) نمی‌توان معلوم کرد

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=25 \\ a_{20}+a_{19}+a_{18}=125 \end{cases} \implies (a_1+a_{20})+(a_2+a_{19})+(a_3+a_{18})=150$$

می‌دانیم در هر تصاعد حسابی مجموع دو جملهٔ متساوی‌البعد از طرفین برابر است با مجموع جملهٔ اول و آخر یا دوبرابر جملهٔ وسط تصاعد (توجه کنید این تصاعد جمله وسط ندارد. چرا؟) پس:

$(a_1 + a_{20}) + (a_1 + a_{20}) + (a_1 + a_{20}) = 150 \implies a_1 + a_{20} = 50$

$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \implies S_{20} = 10\times 50 = 500$

و گزینه (۳) درست است.

مثال ۲۱. مطلوبست محاسبهٔ هر یک از مجموعهای زیر:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

می‌دانیم که $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ اکنون می‌خواهیم این مجموع را با روشی دیگر پیدا کنیم. ابتدا اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(x+1)^2 - x^2 \equiv 2x + 1$$

و در این اتحاد به جای x اعداد ۱، ۲، ۳، ... و n را قرار داده روابط حاصل را باهم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{ll} x = ۱ & ۲^۲ - ۱^۲ = ۲(۱) + ۱ \\ x = ۲ & ۳^۲ - ۲^۲ = ۲(۲) + ۱ \\ x = ۳ & ۴^۲ - ۳^۲ = ۲(۳) + ۱ \\ & \dots\dots\dots\dots \\ x = n & (n+1)^2 - n^2 = 2(n) + 1 \\ \hline & (n+1)^2 - 1^2 = 2(1+2+3+\dots+n) + n \end{array}$$

$$n^2 + 2n + 1 - 1 = 2S_1 + n \qquad S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

برای محاسبهٔ S_2 به‌طور مشابه از اتحاد استفاده می‌کنیم:

$$(x+1)^3 - x^3 \equiv 3x^2 + 3x + 1$$

$$\begin{array}{ll} x = ۱ & ۲^۳ - ۱^۳ = ۳(۱^۲) + ۳(۱) + ۱ \\ x = ۲ & ۳^۳ - ۲^۳ = ۳(۲^۲) + ۳(۲) + ۱ \\ x = ۳ & ۴^۳ - ۳^۳ = ۳(۳^۲) + ۳(۳) + ۱ \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x = n & (n+1)^3 - n^3 = 3(n^2) + 3(n) + 1 \\ \hline & (n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + 3S_1 + n \end{array}$$

به‌جای S_1 مقدار گذاشته S_2 را از رابطه حساب می‌کنیم

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

و سرانجام پس از محاسبات لازم که انجام خواهید داد:

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تمرین: با همین روش $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ را محاسبه کرده آنگاه تحقیق

کنید :

$$S_3=(S_1)^2$$

مثال ۲۲: حاصل عبارت $۱^۲-۲^۲+\cdots+۹۷^۲-۹۸^۲+۹۹^۲-۱۰۰^۲$ کدام است؟

۱) ۵۰۵۰ ۲) ۵۲۵۰

۳) ۵۰۲۵ ۴) ۵۵۰۵

عبارت را چنین می‌نویسیم :

$$(۱+۲)(۱-۲)+\cdots+(۹۷+۹۸)(۹۷-۹۸)+(۹۹+۱۰۰)(۹۹-۱۰۰)$$

$$=۱۰۰+۹۹+۹۸+۹۷+\cdots+۲+۱=\frac{۱۰۰(۱۰۰+۱)}{۲}=۵۰۵۰$$

این قسمت در پایان بخش تصاعد حسابی (صفحه ۱۳) آورده شود .

مسائل

۱ــ مطلوبست تعداد اعداد سه رقمی قابل قسمت بر ۵ و مجموع آنها

۲ــ مجموع اعداد مندرج در یک جدول ضرب ۱۰ × ۱۰ را حساب کنید .

۳ــ مطلوبست تعیین سه‌جمله متوالی یک تصاعد عددی که مجموعشان S و مجموع مربعاتشان P باشد و بحث در مسئله (شرط امکان مسئله : $3P - S^2 \geqslant 0$)

۴ــ مطلوبست محاسبهٔ جمله اول و قدر نسبت تصاعد عددی که مجموع n جملهٔ آن به ازاء هر مقداری از n مساوی $3n^2+n$ باشد .

۵ ــ مجموع P جمله تصاعدعددی q و مجموع q جملهٔ آن P است مطلوبست محاسبهٔ مجموع $P \pm q$ جملهٔ آن

۶ــ ثابت کنید اگر S_1 و S_2 و S_3 به ترتیب مجموع n و ۲n و ۳n جملهٔ متوالی یک تصاعد عددی باشند ، داریم : $S_3 = 3(S_2 - S_1)$

۷ــ گلوله‌هائی یکسان را روی هم می‌چینیم به طوری که تشکیل هرم مربع‌القاعده منتظمی بدهند بنا بر آنکه بر هر ضلع قاعده n گلوله واقع باشد ، مطلوبست عده گلوله‌ها .

۸ــ ثابت کنید اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای جمل متوالی یک تصاعد حسابی باشند شعاع دایره محاطی داخلی مثلث مساوی قدر نسبت این تصاعد است .

۹ــ مجموع پنج عدد که تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند ۷۵ و حاصلضرب بزرگترین و کوچکترین آنها ۱۶۱ است آنها را حساب کنید .

۱۰ــ درمعادله درجه دوم $ax^2 + bx+c = 0$ ضرائب a و b و c جمله‌های متوالی یک تصاعد حسابی هستند . مطلوبست رابطهٔ مابین ریشه‌های معادله .

تست‌های دنباله‌ها ـ تصاعد حسابی

۱ـ جملهٔ عمومی دنبالهٔ $\ldots$ و $\frac{۳}{۷}$ ۱ و $\frac{۱}{۳}$ ۱ و $\frac{۱}{۵}$ ۱ و $\frac{۲}{۳}$ ۱ کدام است؟

۱) $\frac{n+۱}{n+۲}$ ۲) $\frac{۲n}{n-۱}$

۳) $\frac{n}{n+۲}$ ۴) $\frac{۲n}{n+۲}$

۲ـ جمله عمومی دنباله‌ای $t_n=\frac{n^2-۵}{n+۹}$ می‌باشد، کدام جملهٔ این دنباله برابر ۵ می‌شود؟

۱) جملهٔ هفتم ۲) جملهٔ هشتم

۳) جملهٔ نهم ۴) جملهٔ دهم

۳ـ جملهٔ $۲n+۱$ ام یک دنباله $۲n-۱$ است. جمله هفتم آن کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۷

۳) ۵ ۴) $\frac{۱۵}{۷}$

۴ـ a و b چقدر باشند تا دنبالهٔ $\ldots$ و $۴a+b$، $a+b+۵$، $۲a-۱$، $۲a+b+۱$ یک تصاعد حسابی باشد.

۱) $a=2, b=-3$ ۲) $a=2, b=3$

۳) $a=-2, b=3$ ۴) $a=-2, b=-3$

۵ـ جملهٔ عمومی یک تصاعد حسابی $a_n=۵n+۳$ است. قدر نسبت تصاعد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴-

۳) ۵ ۴) ۵-

۶ـ جمله چهارم یک تصاد حسابی ۵ و جمله هشتم آن ۱۷ است. جمله دوازدهم آن کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۹

۳) ۳۰ ۴) ۳۱

۷ـ تعداد اعداد سه‌رقمی که رقم سمت راست آنها ۴ بوده ولی بر ۴ بخش‌پذیر نیستند، کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۴۵
۳) ۳۰ ۴) ۲۵

۸ـ بیستمین عدد طبیعی که باقیمانده‌اش بر ۷ برابر ۲ است ، کدام است ؟

۱) ۱۳۵ ۲) ۱۴۲
۳) ۱۵۱ ۴) ۱۵۷

۹ـ بین دو عدد ۳۲۷ و ۷۲۳ چند عدد صحیح وجود دارد ؟

۱) ۳۹۷ ۲) ۳۹۶
۳) ۳۹۵ ۴) هیچکدام

۱۰ـ جمله عمومی یک تصاد حسابی $t_n = 2n - 1$ است . مجموع ۵ جملهٔ اول آن کدام است ؟

۱) ۹ ۲) ۱۵
۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۱ـ مجموع n جملهٔ اول یک تصاعد حسابی $S_n = n^2 + 2n$ است . جملهٔ هفتم آن کدام است ؟

۱) ۶۳ ۲) ۱۷
۳) ۱۵ ۴) ۲۱

۱۲ـ مجموع n جمله اول یک تصاد حسابی $S_n = 2n^2$ است . قدر نسبت تصاعد کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) هیچکدام

۱۳ـ بر محیط دایره‌ای ۱۲ نقطه واقع است . از هر نقطه به‌تمام نقاط دیگر وصل می‌کنیم . تعداد وترهای حاصل برابر است با :

۱) ۱۳۲ ۲) ۱۴۴
۳) ۷۲ ۴) ۶۶

۱۴ـ اگر داشته باشیم : $x(x+3)+(x+6)+(x+9)+\cdots+(x+33)=550$ کدام x است ؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۲
۳) ۶۰ ۴) ۶۴

۱۵ــ مجموع اعداد یک جدول ضرب معمولی (۱۰×۱۰) برابر است با

۱) ۵۵۰۰ ۲) ۳۰۲۵

۳) ۹۰۰ ۴) ۵۰۵۰

۱۶ــ مجموع ۵ جمله اول یک تصاعد حسابی ۱۰ و مجموع ۵ جمله آخر آن ۱۴۵ است اگر مجموع تمام جملاتش ۲۱۷ باشد، این تصاعد چند جمله دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵

۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۱۷ــ اگر بین دو عدد ۵۰ و ۲۹۰ یازده واسطه عددی درج کنیم. مجموع آن یازده عدد کدام است؟

۱) ۱۷۰۰ ۲) ۱۸۷۰

۳) ۲۰۴۰ ۴) ۲۲۱۰

۱۸ــ مجموع سه جملهٔ متوالی از یک تصاعد حسابی صعودی ۲۱ و حاصل‌ضرب آنها ۲۸۰ است. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

۱) ۳ــ ۲) ۳

۳) ۶ ۴) گزینه ۱ و ۲ هردو درست است

۱۹ــ در یک تصاعد حسابی جملهٔ پانزدهم برابر ۱۰ است. مجموع ۲۹ جملهٔ اول این‌تصاعد کدام است؟

۱) ۲۹۰ ۲) ۲۸۰

۳) ۳۲۰ ۴) ۳۰۰

۲۰ــ در یک تصاعد حسابی داریم: $a_p = q$ و $a_q = p$، قدر نسبت تصاعد کدام‌است؟

۱) ۱

۲) ۱ــ

۳) $P - q$

۴) $q - p$

۲۱ــ در یک تصاعد حسابی داریم: $a_p = q$ و $a_q = p$ در این‌صورت a_n کدام‌است؟

۱) $a_n = p + q + n$ ۲) $a_n = p + q - n$

۳) $a_n = q - p + n$ ۴) $a_n = p - q + n$

۲۲ـ در یک تصاعد حسابی داریم : $a_p = q$ و $a_q = p$ در این‌صورت a_{p+q} کدام است ؟

۱) $P + q$ ۲) $P - q$

۳) $\frac{p+q}{۲}$ ۴) صفر

۲۳ـ در تصاعد . . . و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ مطلوب است $\frac{S_{n+۱}}{S_n}$

۱) $\frac{n+۱}{n}$ ۲) $\frac{n+۲}{n+۱}$

۳) $\frac{n+۲}{n}$ ۴) $n+۱$

۲۴ـ مجموع ۸ جملهٔ اول یک تصاعد حسابی با مجموع ۱۲ جملهٔ اول آن مساوی است ($S_8 = S_{12}$) مجموع بیست‌جملهٔ اول آن کدام‌است ؟

۱) $S_{12} + S_8$ ۲) $۲S_{12} - S_8$

۳) $S_8 - S_{12}$ ۴) صفر

۲۵ـ اگر $\log a$ و $\log b$ و $\log c$ جمله‌های متوالی یک تصاعد حسابی باشند ، معادله درجه دوم $ax^2 + 2bx + c = 0$

۱) دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است

۲) دارای ریشه مضاعف است

۳) دارای ریشه‌های ۱ـ و $\frac{c}{a}$ـ است

۴) ریشهٔ حقیقی ندارد

۲۶ـ در دو تصاعد حسابی . . . و ۲۹ و ۲۵ و ۲۱ و ۱۷ بعضی از جملات متساوی‌اند . مجموع . . . و ۳۱ و ۲۶ و ۲۱ و ۱۶

۱۰ جمله متساوی اولیه آنها کدام‌است ؟

۱) ۱۰۱۱ ۲) ۱۱۰۱

۳) ۱۱۱۰ ۴) ۱۱۱۱

۲۷ـ در یک تصاعد حسابی متناهی $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = ۴۰$ مجموع ۱۹ جملهٔ اولیه این تصاعد عبارت‌است از :

۱) ۳۸۰ ۲) ۱۹۰

۳) ۴۰۰ ۴) ۲۰۰

۲۸ــ جملهٔ بیستم یک تصاعد حسابی ۱۷ و جملهٔ چهلم آن ۳۳ است . جمله سی ام آن عبارت‌است از :

۱) ۲۵ ۲) ۲۷

۳) ۲۹ ۴) ۳۱

۲۹ــ اگر x_1 و x_2 و x_3 سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی با قدر نسبت r باشد وداشته باشیم $f(x)= ax + b$ ، آنگاه :

۱) $f(x_1)$ و $f(x_2)$ و $f(x_3)$ سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی با قدر نسبت r می‌باشند

۲) $f(x_1)$ و $f(x_2)$ و $f(x_3)$ سه‌جمله‌متوالی یک‌تصاعدحسابی‌با قدر نسبت r + b می‌باشند .

۳) $f(x_1)$ و $f(x_2)$ و $f(x_3)$ سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی با قدرنسبت ar +b می‌باشند .

۴) $f(x_1)$ و $f(x_2)$ و $f(x_3)$ سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی با قدرنسبت ar می‌باشند .

۳۰ــ اگر x و y و z جملات متوالی یک‌تصاعد حسابی بوده و داشته باشیم :

$$a(z-y) + b(x-z) + c(y-x) = 0$$

۱) a و b و c جمل متوالی یک تصاعد حسابی هستند

۲) a و b و c جمل متوالی یک تصاعد هندسی هستند

۳) a و b و c جمل متوالی یک تصاعد توافقی هستند

۴) هیچکدام

۳۱ــ تعداد اعداد دو رقمی که بر ۳ بخش‌پذیرند ولی بر ۹ بخش‌پذیر نیستند ، کدام‌است ؟

۱) ۳۳ ۲) ۲۲

۳) ۳۰ ۴) ۲۰

۳۲ــ در یک تصاعد حسابی از هریک از جملات ۵ واحد کم کرده‌ایم . اعداد حاصل :

۱) تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند که قدر نسبتش ۵ واحد از قدر نسبت تصاعد اول کمتر است .

۲) تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند که قدر نسبتش ۵ برابر قدر نسبت تصاعد اول است .

۳) تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند که قدر نسبتش (۵-) برابر قدر نسبت تصاعد اول است .

۴) تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند که قدر نسبتش با قدر نسبت تصاعد اول برابر است .

۳۳- در یک تصاعد عددی (حسابی) با قدر نسبت d ، جملهٔ اول دو برابر جملهٔ دهم است . جملهٔ بیستم این تصاعد کدام است ؟

۱) صفر ۲) d

۳) -d ۴) هیچکدام

۳۴- هرگاه a_1 و a_2 و a_3 و . . . a_n به ترتیب جمله‌های متوالی یک تصاعد حسابی باشند و داشته باشیم :

$$S=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

آنگاه برابر است با :

۱) $\frac{n+1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$ ۲) $\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$

۳) $\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$ ۴) $\frac{1-n}{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}}$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	پاسخ تست‌های تصاعد حسابی
۱	۴	جملهٔ عمومی دنباله $t_n = \frac{2n}{n+2}$ می‌باشد زیرا به‌ازاء $n = 1$ و ۲ و ۳ و ۴۰۰ جملهٔ اول و دوم و سوم و چهارم و . . . نتیجه می‌شود .
۲	۴	$t_n = \frac{n^2-5}{n+9} \Rightarrow \frac{n^2-5}{n+9} = 5 \Rightarrow n^2-5n-50=0 \Rightarrow$ $n=-5$ و $n=10$ که $n=10$ قابل قبول است . توجه کنید : با آزمایش جواب‌ها نیز به‌نتیجه می‌رسیم .
۳	۳	$t_{2n+1} = 2n-1 , 2n+1 = 7 \Rightarrow n = 3$ $t_7 = 2(3)-1 \Rightarrow t_7 = 5$
۴	۱	$\div\ 2a+b+1 , 2a-1 , a+b+5 , 4a+b , ...$ $\begin{cases}(2a+b+1)+(a+b+5) = 2(2a-1) \\ (2a-1)+(4a+b) = 2(a+b+5)\end{cases}$ $\begin{cases}-a+2b=-8 \\ 4a-b=11\end{cases}$ از حل این دستگاه $a=2$ و $b=-3$ نتیجه می‌شود . توجه کنید : با آزمایش جواب‌ها نیز به‌نتیجه می‌رسیم . به‌ویژه که دراین سئوال گزینه (۱) جواب است .
۵	۳	راه اول : $a_n = 5n+3 \quad d = a_2-a_1$ $a_2=13 \quad , \quad a_1=8 \Rightarrow d=5$ راه دوم : t_n را به‌صورت $a_n = 8+(n-1)(5)$ می‌نویسیم و از طریق مقایسه با فرمول $a_n = a_1+(n-1)d$ نتیجه می‌گیریم‌که $d = 5$
۶	۲	$a_4=5 \quad , \quad a_8=17 \Rightarrow a_{12}=?$ $a_4+a_{12}=2a_8$ چرا؟ $\Rightarrow 5+a_{12}=34 \Rightarrow a_{12}=29$
۷	۲	۹۹۴ و . . . و ۱۷۴ و ۱۵۴ و ۱۳۴ و ۱۱۴ : $a_1=114$ و $d=20$ و $a_n=994$ و $d=?$ $a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow 994=114+(n-\ )(20) \Rightarrow n=45$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
۸	۲	مجموعه اعداد طبیعی که باقیماندهٔ هرکدامشان بر ۷ برابر ۲ است، تصاعد حسابی زیر را تشکیل می‌دهند: ۹ و ۱۶ و ۲۳ و . . . : $a_1=۹$ و $d=۷$ و $n=۲۰$ و $a_n=?$ $a_n = ۹+۱۹(۷) = ۹+۱۳۳ = ۱۴۲$
۹	۳	تعداد اعداد صحیح بین دوعدد a و b $(b > a)$ از فرمول $(b-a)-۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین $(۷۲۳-۳۲۷)-۱ = ۳۹۵$
۱۰	۴	با توجه به‌مطالب درسی (اعداد مربعی) $t_n = 2n-1 \Rightarrow S_n = n^2$ $\Rightarrow S_5 = ۵^2 = ۲۵$
۱۱	۳	$S_n = n^2 + ۲n \Rightarrow a_7 = S_7 - S_6 = ۶۳ - ۴۸ = ۱۵$
۱۲	۲	$S_n = ۲n^2 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = a_1 = ۲ \\ S_2 = ۸ \end{cases} \Rightarrow a_2 = S_2 - S_1 = ۸ - ۲ = ۶$ $d = a_2 - a = ۶ - ۲ = ۴$
۱۳	۴	راه‌اول: از هر نقطه به ۱۱ نقطهٔ دیگر می‌توان وصل کرده ۱۱ وتر به دست آورد پس ۱۱×۱۲ وتر رسم می‌شود. اما توجه دارید که مثلا" وتری مانند AB با وتر BA برهم منطبق می‌شود. پس تعداد وترها از فرمول $\frac{۱۱\times۱۲}{۲} = ۶۶$ بدست می‌آید. راه دوم: از نقطهٔ A، ۱۱ وتر و از نقطهٔ B، ۱۰ وتر و از نقطهٔ C، ۹ وتر و . . . می‌توانیم رسم کنیم. پس تصاعد زیر را داریم. ۱۱ و ۱۰ و ۹ و ۸ و . . . و ۱ مجموع جملات این تصاعد از فرمول $S = \frac{۱۱\times۱۲}{۲} = ۶۶$ بدست می‌آید. چرا؟

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
۱۴	۲	$(x+۳)+(x+۶)+(x+۹)+\cdots+(x+۳۳)=۵۵۰$ چرا؟ $a_1=x+۳$ و $d=۳$ و $a_n=x+۳۳ \Rightarrow n=۱۱$ $S_n=\frac{n}{۲}(a_1+a_n) \Rightarrow \frac{۱۱}{۲}(x+۳+x+۳۳)=۵۵۰$ از حل این معادله $x=۳۲$ نتیجه می‌شود.
۱۵	۲	چرا؟ $(۱+۲+۳+\cdots+۱۰)^۲=(۵۵)^۲=۳۰۲۵$
۱۶	۱	$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=۱۰$ از جمع دو رابطه فوق داریم: $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}=۱۴۵$ $(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_5+a_{n-4})=۱۵۵$ و با توجه به اینکه در هر تصاعد حسابی مجموع دو جملهٔ متساوی‌الفاصله از طرفین برابر است با مجموع دو جملهٔ اول و آخر تصاعد. پس: $۵(a_1+a_n)=۱۵۵$ $\quad a_1+a_n=۳۱$ و از آنجا: $S_n=\frac{n}{۲}(a_1+a_n) \Rightarrow ۲۱۷=\frac{n}{۲}(۳۱) \Rightarrow n=۱۴$
۱۷	۲	اگر جملهٔ وسط تصاعد را a_k بگیریم: $a_k=\frac{۵۰+۲۹۰}{۲}=۷۰$ چرا؟ $S_{11}=۱۱\times ۱۷۰=۱۸۷۰$
۱۸	۲	جمله وسط تصاعد را x و قدر نسبت را d فرض می‌کنیم: $x-d, x, x+d$ ÷ $\begin{cases}(x-d)+x+(x+d)=۲۱\\ x(x-d)(x+d)=۲۸۰\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x=۷\\ ۷(۴۹-d^2)=۲۸۰ \Rightarrow d=\pm ۳\end{cases}$ چون تصاعد حسابی بنابه فرض صعودی است، جواب $d=۳$ قابل قبول است.
۱۹	۱	$a_{15}=۱۰ \Rightarrow a_1+۱۴d=۱۰$ $S_{29}=\frac{۲۹}{۲}[۲a+۲۸d]=۲۹(a_1+۱۴d)=۲۹\times ۱۰=۲۹۰$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
۲۰	۲	$\begin{cases} a_p = q \\ a_q = p \end{cases} \Rightarrow d = \frac{a_p - a_q}{p-q} = \frac{q-p}{p-q} \Rightarrow d = -۱ \quad p \neq q$
۲۱	۲	راه حل تستی : پاسخ صحیح باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که به‌ازاء $n = p$ و $n = q$ به‌ترتیب $a_p = q$ و $a_q = p$ نتیجه شود . گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) نادرست است زیرا این دو حالت خاص از فرمول عمومی مستخرج نمی‌شود . به‌ناچار پاسخ صحیح گزینه (۲) است . $a_n = P + q - n \quad \begin{cases} n = p \Rightarrow a_p = q \\ n = q \Rightarrow a_q = p \end{cases}$ راه حل کلی : بنابرتست قبل : $\begin{cases} a_p = q \\ a_q = p \end{cases} \Rightarrow d = -۱$ $a_p = a_1 + (p-۱)(-۱) \Rightarrow q = a_1 - p + ۱ \Rightarrow a_1 = p + q - ۱$ $a_n = a_1 + (n-۱)d \Rightarrow a_n = p + q - ۱ + (n-۱)(-۱)$ $a_n = P + q - n$
۲۲	۴	این سئوال حالت خاص تست قبل ،به‌ازاء $n = p + q$ است . لذا $a_{p+q} = P + q - (P + q) = 0$ به‌عنوان تمرین ، مساله را مستقیما" نیز حل کنید .
۲۳	۳	۱ و ۲ و ۳ و ۴ و . . . $S_n = \frac{n(n+۱)}{۲}, S_{n+1} = \frac{(n+۱)(n+۲)}{۲} \Rightarrow \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+۲}{n}$
۲۴	۴	قضیه : هرگاه در یک تصاعد حسابی $m \neq n, S_m = S_n$ $\quad S_{m+n} = 0$ اثبات : $S_m = S_n \Rightarrow \frac{m}{۲}[۲a_1 + (m-۱)d] = \frac{n}{۲}[۲a_1 + (n-۱)d]$ پس از محاسبات لازم خواهیم داشت : $۲a_1 = -(m+n-۱)d \quad (۱)$ $S_{m+n} = \frac{m+n}{۲}[۲a_1 + (m+n-۱)d] \quad (۲)$ اگر در رابطه (۲) به‌جای $۲a_1$ از رابطهٔ (۱) مقدار قرار دهیم : $S_{m+n} = o$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
		بنابراین : $S_8 = S_{12} \Rightarrow S_{8+12} = 0 \Rightarrow S_{20} = 0$
۲۵	۲	$\div \log a, \log b, \log c \Rightarrow ۲\log b = \log a + \log c \Rightarrow$ $\Rightarrow \log b^2 = \log ac \Rightarrow b^2 = ac$ (۱) $ax^2 + bx + c = 0$ $\Delta' = b^2 - ac$ (۲) با عنایت به‌روابط (۱) و (۲) داریم $\Delta' = 0$ و معادله دارای ریشه‌مضاعف است .
۲۶	۳	۱۷ و ۲۱ و ۲۵ و ۲۹ و ۳۳ و ۳۷ و ۴۱ و . . . : ۱۶ و ۲۱ و ۲۶ و ۳۱ و ۳۶ و ۴۱ و . . . · جملات متساوی دو تصاعد که تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند ۲۱ و ۴۱ و ۶۱ و ۸۱ و . . . : $S_{10} = \frac{۱۰}{۲} [۲(۲۱) + ۹(۲۰)] = ۱۱۱۰$
۲۷	۲	$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = ۴۰$ در هر تصاعد عددی مجموع دو جمله متساوی‌الفاصله از طرفین برابر مجموع جمله اول و آخر است بنابراین $a_4 + a_{16} = a_8 + a_{12} = a_1 + a_{19} = ۲۰$ $S_{19} = \frac{۱۹}{۲} \times ۲۰ = ۱۹۰$
۲۸	۱	$a_{20} = ۱۷$ و $a_{40} = ۳۳$ $a_{30} = ?$ $۲a_{30} = a_{20} + a_{40} = ۱۷ + ۳۳ = ۵۰ \Rightarrow a_{30} = ۲۵$
۲۹	۴	$\div x_1, x_2, x_3 \Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$ $f(x_1) = ax_1 + b, f(x_2) = ax_2 + b, f(x_3) = ax_3 + b$ $f(x_1) + f(x_3) = a(x_1 + x_3) + 2b = 2ax_2 + 2b = 2f(x_2)$ با توجه به رابطه اخیر، معلوم می‌شود که اولاً" سه جملهٔ $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ $\div f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ تشکیل تصاعد عددی می‌دهند

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
		ثانیا" قدرنسبت تصاعد جدید برابر است با :
		$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) = a.r$
		از حل این مساله دو نتیجه زیر حاصل می‌شود :
		الف : هرگاه جملات یک تصاعد حسابی را در a ضرب کنیم ، تصاعد حسابی دیگری به‌دست می‌آید که قدرنسبت آن ، a برابر قدرنسبت تصاعد اول است .
		حالت $b = 0$
		ب : هرگاه جملات یک تصاعد حسابی را با عدد حقیقی b جمع کنیم ، تصاعد حسابی دیگری به‌دست می‌آید که قدرنسبت آن با قدر نسبت تصاعد اول برابر است .
		حالت $a = 1$
۳۰	۱	x و y و z را جملات متوالی یک‌تصاعد حسابی با قدرنسبت r فرض می‌کنیم :
		$\div x, y, z \Rightarrow \begin{cases} z - y = r \\ y - x = r \qquad r \neq o \\ x - z = -2r \end{cases}$
		$a(z - y) + b(x - z) + c(y - x) = ar + b(-2r) + cr = o$
		$(a + c)r = 2br \Rightarrow a + c = 2b$
		یعنی a و b و c جمل متوالی یک تصاعد حسابی هستند .
۳۱	۴	مجموعه اعداد دو رقمی که بر ۳ بخش‌پذیرند ، تصاعد حسابی زیر را تشکیل می‌دهند : ۹۹و . . . و ۲۱ و ۱۸ و ۱۵ و ۱۲
		$۹۹ = ۱۲ + (n - ۱)(۳) \Rightarrow n = ۳۰$
		مجموعه اعداد دو رقمی که بر ۹ بخش پذیرند ، تصاعد حسابی زیر را تشکیل می‌دهند :
		۹۹ و . . . و ۳۶ و ۲۷ و ۱۸
		$۹۹ = ۱۸ + (n - ۱)(۹) \Rightarrow n = ۱۰$
		با توجه به‌اینکه مضارب ۹ بر ۳نیز بخش‌پذیرند لذا ۳۰−۱۰=۲۰

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
۳۲	۴	این سئوال حالت خاصی از سئوال شمارهٔ ۲۹ است $b = -۵$ و $a = ۱$ لذا گزینه (۴) درست است .
۳۳	۲	$a_1 = ۲a_{10} = a_1 = ۲(a_1 + ۹d) \Rightarrow a_1 + ۱۸d = 0$ $a_{20} = a_1 + ۱۹d = (a_1 + ۱۸d) + d = 0 + d = d$
۳۴	۳	$S = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}$ اگر هرکدام از کسرها را گویا کرده و $a_n - a_{n-1} = d$ فرض کنیم (d قدر نسبت است) خواهیم داشت : $S = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n-1} - a_n} \Rightarrow$ $S = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{-d} + \frac{\sqrt{a_2} \quad \sqrt{a_3}}{-d} + \dots \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{-d} \Rightarrow$ $S = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_2} - \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{-d}$ $S = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n}}{-d} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d}$ $S = \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})}$ از طرفی می‌دانیم که : $a_n = a_1 + (n-1)d$ لذا $S = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}$

تصاعد هندسی

۱ــ **تعریف:** دنباله اعدادی‌که هر جمله آن مساوی جملهٔ قبلی ضرب در مقدار ثابتی باشد تشکیل تصاعدهندسی می‌دهند. به بیان دیگر تصاعد هندسی دنبالهٔ اعدادی‌است که خارج قسمت هر یک از جمله‌هایش بر جملهٔ ماقبلش مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت را قدر نسبت تصاعد می‌گویند.

قدر نسبت تصاعد هندسی مخالف صفر و (۱) و (۱ــ) فرض می‌شود اگر صفر باشد تمام جمله‌ها برابر صفر و اگر یک باشد تمام جمله‌ها برابرند و اگر (۱ــ) باشد جملات متناوبا" مثبت و منفی (منفی و مثبت) اند. در یک تصاعد هندسی محدود جمله اول را به a_1، قدرنسبت را به r، تعداد جملات را n و جملهٔ عمومی (جمله n ام) را به a_n نمایش می‌دهیم.

مثال: $a_1 = ۳$ و $d = ۲$ ... : ۲۴ : ۱۲ : ۶ : ۳

$a_1 = ۵$ و $d = -۳$ ... : ۱۳۵ــ : ۴۵ + : ۱۵ــ : ۵

$a_1 = ۸۱$ و $d = \frac{۱}{۳}$ ... : $\frac{۱}{۳}$: ۱ : ۳ : ۹ : ۲۷ : ۸۱

هر یک از دنباله‌های فوق یک تصاعد هندسی هستند.

۲ــ محاسبهٔ جمله nام یک تصاعد هندسی:

$$\boxed{a_n = a_1 . r^{n-1}}$$

مثال ۱: جمله دهم تصاعد هندسی ... : ۸ــ : ۴ : ۲ ــ کدامست؟

۱) ۵۱۲ ۲) ۵۱۲ــ

۳) ۱۰۲۴ ۴) ۱۰۲۴ــ

$$a_1 = -2 \ , \ r = \frac{۴}{-۲} = -۲ \quad n = ۱۰ \Rightarrow a_{۱۰} = (-۲) \cdot (-۲)^{۱۰-۱} = (-۲)^{۱۰}$$

$a_{10} = +۱۰۲۴$

گزینه (۳) درست است.

مثال ۲ : جملهٔ n ام یک تصاعد هندسی $a_n = ۳\times۲^{n-1}$ است. جمله هفتم چند برابر جمله سوم است؟

برابر $\frac{a_7}{a_3} = \frac{۳\times۲^۶}{۳\times۲^۲} = ۲^۴ = ۱۶$ و $a_3 = ۳\times۲^۲$ و $a_7 = ۳\times۲^۶$

مثال ۳: اگر جمله نهم یک تصاعد هندسی مساوی با ۶۴ برابر جمله ششم آن باشد، جملهٔ دوازدهم آن چند برابر جمله هشتم خواهد بود؟

۱) ۶۴ برابر　　۲) ۲۵۶ برابر

۳) ۱۲۸ برابر　　۴) نمی‌توان معلوم کرد

$$a_9 = 64\ a_6 \Rightarrow a_1 r^8 = 64 a_1 r^5 \Rightarrow r^3 = 64 \Rightarrow r = 4 \qquad a_1 \neq 0$$

توجه دارید که $a_1 \neq ۰$ زیرا اگر $a_1 = ۰$ آنگاه تمام جملات تصاعد صفر خواهد شد.

$$\frac{a_{12}}{a_8} = \frac{a_1 . r^{11}}{a_1 . r^7} = r^۴ = ۴^۴ = ۲۵۶$$

۲ـ مسئله مهم: بین دو عدد ۹ و $\frac{۸}{۳}$ دو واسطهٔ هندسی درج کنید.

یعنی دو عدد چنان بیابید که دنبالهٔ $\frac{۸}{۳}$ و ... و ... و ۹ یک تصاعد هندسی باشد.

$$a_1 = 9 \ , \ n=4 \ , \ a_4 = \frac{8}{3} \ , \ r = ?$$

$$a_n = a_1 . r^{n-1} \Rightarrow \frac{8}{3} = 9\times r^{4-1} \Rightarrow r^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$۹ \text{ و } ۹\times\frac{۲}{۳} \text{ و } ۹\times(\frac{۲}{۳})^۲ \text{ و } \frac{۸}{۳} \Rightarrow ۹ ، ۶ ، ۴ ، \frac{۸}{۳}$$

دو عدد مورد نظر ۶ و ۴ است.

۴ـ هرگاه سه‌عدد a و c و b (به همین ترتیب) تشکیل یک تصاعد هندسی بدهند، عدد وسط یعنی c را واسطه هندسی بین a و b گوئیم و داریم:

$$a : c : b \iff c^2 = a.b \implies c = \pm\sqrt{a.b}$$

اگر a و b هم‌علامت باشند مسئله دو جواب دارد و اگر مختلف‌العلامه باشند جواب ندارد.

مثال ٤: اگر x واسطه هندسی و y واسطه عددی (حسابی) دو عدد مثبت a و b باشد:

۱) $x < y$ ۲) $x > y$

۳) $x \leqslant y$ ۴) $x \geqslant y$

راه تستی: با مثال عددی اگر $a = ۹$ و $b = ۴$ آنگاه $x < y$ و اگر $a = b = ۷$ آنگاه $x = y$ بنابراین $x \leqslant y$ و گزینه ۳ درست است.

راه کلّی: داریم:

$$(a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + 2ab \geqslant 4ab \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

جذر مثبت طرف اول واسطه حسابی و جذر طرف دوم اعم از مثبت یا منفی واسطه هندسی است.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \quad , \quad \frac{a+b}{2} \geqslant -\sqrt{ab} \Rightarrow y \geqslant x \text{ یا } x \leqslant y$$

تساوی مربوط به زمانی است که دو عدد مساوی باشند.

تذکّر: در هر تصاعد هندسی هر جمله واسطه هندسی است بین دوجملهٔ طرفینش.

۵ ــ محاسبه مجموع n جمله از یک تصاعد هندسی:

فرمول اول	$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$
فرمول دوم	$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$

مثال ۵: مجموع ۵۱۲ + ... + ۱۶ــ۸ + ۴ــ۲ برابر است با:

۱) ۳۴۲ ۲) ۱۰۲۶

۳) ۱۰۲۲ ۴) هیچکدام

$$a_1 = 2 \ , \ r = \frac{-4}{2} = -2 \ , a_n = 512 \quad n = ? \ , \ S_n = ?$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow 512 = 2(-2)^{n-1} \Rightarrow (-2)^{n-1} = 256 = (-2)^8 \Rightarrow$$

$$n-1 = 8$$

$$n = ۹ \qquad S_۹ = ۲ \times \frac{۱-(-۲)^۹}{۱-(-۲)} = ۲ \times \frac{۱+۵۱۲}{۳} = ۲ \times \frac{۵۱۳}{۳} = ۳۴۲$$

راه سریعتر: اگر از فرمول دوم استفاده می‌کردیم، محاسبه سریعتر بود و به محاسبه

n هم نیاز نداشتیم . اصولا" مادامی که جمله n ام معلوم باشد ، فرمول دوم مناسبتر است .

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-(-2)} = \frac{2-512(-2)}{1-(-2)} = \frac{1026}{3} = 342$$

و گزینهٔ (۱) درست است .

مثال ۶: جمله عمومی یک تصاعد هندسی به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است مجموع چند جمله از آن برابر ۲۵۵ می‌شود؟

۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۰

$$a_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1 \quad , \quad a_2 = 2^{2-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a_2}{a_1} = 2$$

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) \Rightarrow 255 = 1\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) \Rightarrow 2^n - 1 = 255 \Rightarrow$$

$$2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow n = 8$$

گزینه (۲) درست است

مثال ۷: معروفست که وقتی مخترع شطرنج اختراع خود را به سلطان عصر خویش عرضه داشت پادشاه به قدری محظوظ شد که به او گفت: هرچه از من می‌خواهی تقاضا کن. مخترع از پادشاه خواست در خانهٔ اول صفحه شطرنج یک دانه گندم و در خانه دوم دو گندم و در خانه سوم چهارگندم و درخانه‌چهارم هشت گندم و . . . و همین طور در هر خانه دوبرابر عده گندمهای خانه ماقبل بگذارند. تا آخرین خانه صفحه شطرنج که خانه ۶۴ ام است. و مجموع گندمهائی را که برصفحه جمع می‌شود به او بدهند. پادشاه براین تمنا که به‌نظرش ناچیز می‌آمد خندید و به‌وزیر خود امر کرد تا خواهش مخترع شطرنج را برآورده سازد. در عمل معلوم شد که نه فقط گندمهای موجود در مملکت آن سلطان برای این منظور کافی‌نبود بلکه هرگاه تمام تمام ساکنین کرهٔ زمین فقط در مزارع خود گندم می‌کاشتند ۷۵ سال طول می‌کشید تا گندمهائی را که او خواستار شده بود، جمع شود.

تعداد دانه‌های گندم مجموع جملات تصاعد هندسی زیر است:

۱ ، ۲ ، ۴ ، ۸ ، ۱۶ ، . . .

$a_1 = 1$ و $r = 2$ و $n = 64$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = 1\left(\frac{1-2^{64}}{1-2}\right) = 2^{64} - 1$$

تعداد دانه‌های گندم = ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵

به‌عنوان تمرین عملی ۱۰۰ دانه گندم را در ترازوی دقیق داروخانه وزن کرده از آنجاوزن گندم حاصل را برحسب تن محاسبه‌کنید و تحقیق‌کنید امروزه در سراسردنیا باید چند سال گندم کشت شود.

۶ ــ ویژگی تصاعد هندسی با جملات محدود: در هر تصاعد هندسی محدود، حاصل ضرب هر دو جمله که از دو طرف به یک فاصله‌باشند برابر است‌با حاصل‌ضرب جمله‌های اول و آخر تصاعد و در صورتی که تعداد جملات فرد باشد برابر است با مجذور جملهٔ وسط تصاعد.

اثبات: تصاعد هندسی زیر را با قدر نسبت r در نظر می‌گیریم:

$$a_1 , a_2 , a_3 , \dots \alpha \dots \gamma \dots \beta \dots a_{n-2} , a_{n-1} , a_n$$

فرض می‌کنیم α و β دو جملهٔ متساوی البعد از طرفین باشند و مثلاً" تعداد جملات قبل‌از α و بعداز β برابر m باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\alpha = a_1 r^m \qquad (۱)$$

اکنون اگر جملات تصاعد را از آخر به اول بنویسیم تصاعد هندسی دیگری با قدر نسبت $\frac{1}{r}$ به دست می‌آید. چرا؟

$$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \dots \beta \dots \gamma \dots \alpha \dots a_3 , a_2 , a_1$$

و در اینجا نیز داریم:

$$\beta = a_n \left(\frac{1}{r}\right)^m = \frac{a_n}{r^m} \qquad (۲)$$

از ضرب طرفین دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$\boxed{\alpha . \beta = a_1 . a_n}$$

و اگر γ جملهٔ وسط تصاعد هندسی باشد:

$$\gamma^2 = a_1 . a_n$$

مثال عددی: ۲ ، ۶ ، ۱۸ ، ۵۴ ، ۱۶۲ ، ۴۸۶ ، ۱۴۵۸

$$۶ \times ۴۸۶ = ۱۸ \times ۱۶۲ = ۵۴^۲ = ۲ \times ۱۴۵۸$$

تمرین: اگر a_m ، a_n و a_p و a_q جمله‌های mام و nام و p ام و qام یک‌تصاعد

هندسی باشند. ثابت کنید:

$$m+n=p+q \iff a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$$

۷ ــ محاسبهٔ حاصل ضرب جمله‌های یک تصاعد هندسی محدود: تصاعد هندسی $a_1, a_2, a_3 \ldots \alpha \ldots \gamma \ldots \beta \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ را درنظر می‌گیریم اگر حاصل ضرب جملات این تصاعد را p بنامیم خواهیم داشت:

$$p = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots \alpha \ldots \gamma \ldots \beta \ldots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \qquad (۱)$$

و یا می‌توانیم بنویسیم:

$$p = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \ldots \beta \ldots \gamma \ldots \alpha \ldots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \qquad (۲)$$

اگر طرفین دو رابطه (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$p^2 = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1})(a_3 a_{n-2}) \ldots (\alpha\beta)\gamma^2(\beta\alpha) \ldots (a_{n-2} a_3)$$
$$\times (a_{n-1} a_2)(a_n a_1)$$

تعدادپرانتزهابرابر n است و با استفاده از شمارهٔ (۶) همین بخش می‌توانیم بنویسیم:

$$\boxed{p^2 = (a_1 \cdot a_n)^n} \iff \boxed{|p| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

مثال ۸: حاصل ضرب جمله‌های تصاعد هندسی که در آن $a_1 = -۱۶$ و $r = \frac{۱}{۲}$ و $n = ۵$ است را حساب کنید.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \implies a_5 = (-16)(\frac{1}{2})^4 = -1$$

$$|p| = \sqrt{[(-16)(-1)]^5} \implies |p| = \sqrt{16^5} = \sqrt{2^{20}} = 2^{10}$$

$$\implies |p| = 2^{10}$$

اما چون تمام جملات تصاعد منفی بوده (چرا؟) و تعداد آنها نیز فرد است. پس حاصل ضرب جملات منفی است. لذا:

$$|p| = ۲^{۱۰} \implies p = -۱۰۲۴$$

مثال ۹: در یک تصاعد هندسی حاصلضرب ۸ جمله آن $\frac{۱}{۱۶}$ و قدر نسبت تصاعد

$-\frac{1}{2}$ است جملهٔ اول آن کدامست؟

۱) ۸+ یا ۸−　　۲) $+\frac{1}{8}$

۳) $-\frac{1}{8}$　　۴) $+\frac{1}{4}$

$$P = \frac{1}{16} \quad , \quad n=8 \quad , \quad r = -\frac{1}{2} \qquad a_1 = ?$$

$$\begin{cases} a_n = a_1 r^{n-1} \\ p^2 = (a_1 a_n)^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_8 = a_1 (-\frac{1}{2})^7 \\ (\frac{1}{16})^2 = (a_1 \cdot a_8)^8 \end{cases}$$

چرا؟ $(\frac{1}{16})^2 = [a_1 \cdot a_1 (-\frac{1}{2})^7]^8 \Rightarrow (\frac{1}{2})^8 = [(-\frac{1}{2})^7 \cdot a_1^2]^8$

چرا؟ $\left| (-\frac{1}{2})^7 \cdot a_1^7 \right| = \frac{1}{2}$

باتوجه به اینکه عبارت داخل قدرمطلق منفی است. (چرا؟) می‌توان نوشت:

چرا؟ $-[(-\frac{1}{2})^7 a_1^2] = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1^2 = 2^6 \Rightarrow a_1 = \pm 8$

گزینه (۱) درست است.

مثال ۱۰: مطلوبست تعیین چهارجملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی بنابرآنکه مجموع اولی وچهارمی برابر ۴۵ و مجموع دومی و سومی برابر ۳۰ باشد.

می‌توانیم بنویسیم: $a_1 \ , \ a_1 r \ , \ a_1 r^2 \ , \ a_1 r^3$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 r^3 = 45 \\ a_1 r + a_1 r^2 = 30 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 (1+r^3) = 45 & (1) \\ a_1 r (1+r) = 30 & (2) \end{cases}$$

از تقسیم طرفین روابط (۱) و (۲) برهم و با فرض $r \neq -1$ داریم:

$$\frac{1-r+r^2}{r} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \qquad \begin{cases} r=2 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

یا

$r = 2 \Rightarrow a_1 (1+r^3) = 45 \Rightarrow a_1 = 5$

و تصاعد چنین است:

۴۰ و ۲۰ و ۱۰ و ۵

$r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1(1+r^3)=45 \Rightarrow a_1=40$

و تصاعد چنین است:

۵ ، ۱۰ و ۲۰ و ۴۰

۸ ــ فرمول حد مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی:

اگر $-1 < r < 1$ یعنی $|r| < 1$ و $n \to \infty$ آنگاه $S = \frac{a_1}{1-r}$ حد

مثال ۱۱: حد مجموع جمله‌های تصاعد هندسی $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) ۱ ۴) هیچکدام

$$\text{حد } S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

مثال ۱۲: حد مجموع جمله‌های تصاعد $\log 2, (\log 2)^2, (\log 2)^3, \dots$ برابر است با:

۱) $\log_5 2$ ۲) $\log_2 5$

۳) $\log 5$ ۴) 1

$$a_1 = \log 2 \ , \ r = \log 2 < 1 \Rightarrow \text{حد } S = \frac{\log 2}{1-\log 2} = \frac{\log 2}{\log 10 - \log 2} =$$

$$= \frac{\log 2}{\log 5} = \log_5 2$$

و گزینه (۱) درست است.

مثال ۱۳: حاصل عبارت

$$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\dots\dots}}}}$$

برابر است با:

۱) ۳ ۲) بینهایت

۳) ۳ ۴) هیچکدام

اگر عبارت را A بنامیم:

$$A = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times 3^{\frac{1}{16}} \times \dots =$$

$$= ۳^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots} = ۳^{۱} = ۳$$

مثال ۱۴: اگر حد مجموع $۳^{m}+۳^{m-۱}+۳^{m-۲}+\cdots$ برابر $\frac{۴۸۶}{۴}$ و $m \in N$ ، m کدامست؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۵

$$a_1 = 3^m \ , \ r = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{486}{4} = \frac{3^m}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{243}{2} = \frac{3^m}{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$3^{m+1} = 243 \Rightarrow 3^{m+1} = 3^5 \Rightarrow m+1=5 \Rightarrow m=4$$

مثال ۱۵: به ازاء چه مقدار a مجموع جمله‌های تصاعد هندسی زیر به سمت ۸ میل می‌کند؟

$$2a \ , \ a\sqrt{2} \ , \ a \ , \ \cdots\cdots$$

۱) $۲-\sqrt{۲}$ ۲) $۳-\sqrt{۲}$

۳) $۲(۲-\sqrt{۲})$ ۴) $۳(۲-\sqrt{۲})$

$$a_1 = 2a \ , \ r = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ n \to \infty$$

$$\text{حد}_{n\to\infty} S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a}{2-\sqrt{2}}$$

$$\frac{۴a}{۲-\sqrt{۲}} = ۸ \Rightarrow a = ۲(۲-\sqrt{۲})$$

گزینه (۳) درست است

۹ــ قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه یک کسر متعارفی تحویل‌ناپذیر مساوی با یک کسر اعشاری باشد، این است که مخرج آن شامل عوامل اولی جز ۲ و ۵ نباشد. عده ارقام اعشاری کسر اعشاری حاصل مساویست با بزرگترین نماینده ۲ یا ۵ که از تجزیه مخرج کسر متعارفی مفروض به عوامل اول به دست می‌آید.

مثال ۱۶: $\frac{۷}{۴۰} = \frac{۷}{۲^{۳} \times ۵} = ۰/۱۷۵$

مثال ۱۷: $\frac{۱۱}{۲۵۰} = \frac{۱۱}{۵^{۳} \times ۲} = ۰/۰۴۴$

مثال ۱۸: $\frac{۳}{۸} = \frac{۳}{۲^{۳}} = ۰/۳۷۵$

مثال ۱۹: $\frac{۱}{۲۵} = \frac{۱}{۵^{۲}} = ۰/۰۴$

مثال ۲۰: کسر $\frac{۹}{۲^{۷} \times ۵^{۶}}$ مفروض است. می‌دانیم که این کسر مساوی یک کسر اعشاری حقیقی است. بدون انجام عمل تقسیم بیان کنید تعداد ارقام اعشاری آن کدامست؟

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۳ ۴) هیچکدام

تعداد ارقام اعشاری = Max (۶و۷) = ۷

گزینه (۲) درست است.

در قضیه قبل بیان کردیم که اگر مخرج کسر تحویل ناپذیر $\frac{a}{b}$ شامل عواملی جز ۲ و ۵ نباشد آن کسر به کسر اعشاری حقیقی تبدیل می‌شود یعنی سرانجام پس از پیداشدن تعداد محدودی ارقام اعشاری باقیماندهٔ تقسیم به صفر می‌رسد. اکنون به مثال زیر توجه کنید:

در تجزیهٔ مخرج عوامل ۲ و ۵ وجود ندارد:

$\frac{۵}{۱۳}$ ۱۳ = ۱ × ۱۳

```
۵۰  | ۱۳
۱۱۰ | ۰/۳۸۴۶۱۵
  ۶۰
   ۸۰
    ۲۰
     ۷۰
      ۵
```

ملاحظه می‌کنید که در باقیمانده دوباره ۵ تکرار شد لذا ارقام خارج قسمت مجددا" تکرار می‌شوند و هرگز باقیمانده صفر نخواهد شد. بنابراین:

$$\frac{۵}{۱۳} = ۰/۳۸۴۶۱۵۳۸۴۶۱۵۳۸۴۶۱۵ \cdots = ۰/\overline{۳۸۴۶۱۵}$$

عدد اعشاری $۰/\overline{۳۸۴۶۱۵}$ را متناوب ساده می‌نامیم، ۳۸۴۶۱۵ را دورهٔ گردش و کسر $\frac{۵}{۱۳}$ را کسر مولد آن نامگذاری می‌کنیم.

به چند مثال دیگر توجه کنید:

$$\frac{۲}{۳} = ۰/۶۶۶۶۶ \cdots = ۰/\overline{۶}$$

$$\frac{۱}{۱۱} = ۰/۰۹۰۹۰۹۰۹ \cdots = ۰/\overline{۰۹}$$

$$\frac{۱}{۷} = ۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷ \cdots = ۰/\overline{۱۴۲۸۵۷}$$

توجه دارید که اولا" کسرها تحویل‌ناپذیرند ،ثانیا" در تجزیه مخرج آنها به‌عاملهای اول عوامل ۲ و ۵ وجود ندارد . ضمنا" دورهٔ گردش بلافاصله بعد از ممیز شروع شده است .

به سه مثال دیگر دقت کنید :

$$\frac{۷}{۱۲} \qquad ۱۲ = ۲^{۲} \times ۳$$

$$\frac{۱}{۱۱۰} \qquad ۱۱۰ = ۲ \times ۵ \times ۱۱$$

$$\frac{۲}{۱۵} \qquad ۱۵ = ۵ \times ۳$$

درتجزیهٔ مخرج این کسرهای تحویل‌ناپذیر غیراز عوامل ۲ یا ۵ عوامل دیگری نیز وجود دارد .

```
۷۰ | ۱۲
   |------
   | ۰/۵۸۳۳
 ۱۰۰
   ۴۰
     ۴۰
       ۴
        ⋱
```

$$\frac{۷}{۱۲} = ۰/۵۸۳۳ \cdots = ۰/۵۸\overline{۳}$$

```
۱۰۰۰ | ۱۱۰
     |------
     | ۰/۰۰۹۰۹۰۹۰۹
   ۱۰۰۰
     ۱۰۰۰
       ⋱
```

$$\frac{۱}{۱۱۰} = ۰/۰۰۹۰۹۰۹۰۹ \cdots = ۰/۰۰\overline{۹}$$

```
۲۰ | ۱۵
   |------
   | ۰/۱۳۳۳
 ۵۰
   ۵۰
     ۵۰
       ⋱
```

$$\frac{۲}{۱۵} = ۰/۱۳۳۳۳ \cdots = ۰/۱\overline{۳}$$

ملاحظه می‌کنید که در هیچکدام از این تقسیمها نیز باقیمانده صفر نخواهد شد .

هر یک از اعداد اعشاری $۰/۵۸\overline{۳}$ و $۰/۰۰\overline{۹}$ و $۰/۱\overline{۳}$ را متناوب مرکب می‌نامیم . هر کدامشان یک جزء ثابت و یک دورهٔ گردش دارند .

در $۰/۵۸\overline{۳}$ جزء ثابت ۵۸ و دورهٔ گردش ۳ است .

در $۰/۰۰\overline{۹}$ جزء ثابت ۰ و دورهٔ گردش ۰۹ است

جزء ثابت و دورهٔ گردش $۰/۱\overline{۳}$ را معلوم کنید .

مثال۲۱: کسر $\frac{A}{۲^{۴} \times ۳}$ مفروض است. (A عدد یست صحیح).

اولا" مطلوبست تعیین مقدار A چنانکه این کسر مساوی با یک کسر اعشاری تحقیقی باشد. ثانیا" A را چنان تعیین کنید که کسر مزبور مولد یک عدد اعشاری متناوب ساده یا مرکب باشد.

اگر $K \in N$ ، $A=3K$ آنگاه کسرمزبورمساوی بایک‌کسر اعشاری تحقیقی‌خواهدشدچرا؟
اگر $A = 2^4 \times K$ و K مضرب۳ نباشدکسرمزبور مولد عدد اعشاری متناوب ساده و اگر A مضرب ۳ و مضرب $۲^۴$ نباشد کسر مزبور مولد عدداعشاری متناوب‌مرکب خواهدبود چرا؟

۱۰ـ تعیین کسر مولد کسر اعشاری متناوب ساده:

$$۰/\overline{۲} = ۰/۲۲۲۲۲ \cdots = \frac{۲}{۹}$$

$$۰/\overline{۳۵} = ۰/۳۵۳۵۳۵ \cdots = \frac{۳۵}{۹۹}$$

$$۰/\overline{۱۰۳} = ۰/۱۰۳۱۰۳۱۰۳ \cdots = \frac{۱۰۳}{۹۹۹}$$

به عنوان مثال یکی از آنها را اثبات می‌کنیم:

$$۰/\overline{۳۵} = \frac{۳۵}{۹۹}$$

راه حل اول: $۰/\overline{۳۵} = ۰/۳۵۳۵۳۵\cdots = ۰/۳۵ + ۰/۰۰۳۵ + ۰/۰۰۰۰۳۵ + \cdots$

$$a_1 = ۰/۳۵ = \frac{۳۵}{۱۰۰} \quad \text{و} \quad r = \frac{۱}{۱۰۰} \qquad \text{حد} \quad S = \frac{\frac{۳۵}{۱۰۰}}{۱ - \frac{۱}{۱۰۰}} = \frac{۳۵}{۹۹}$$

راه حل دوم:

$$x = ۰/\overline{۳۵} = ۰/۳۵۳۵۳۵ \cdots$$

$$۱۰۰\,x = ۳۵/۳۵۳۵ \cdots \Rightarrow ۱۰۰x = ۳۵ + x \Rightarrow x = \frac{۳۵}{۹۹}$$

قاعده: برای تعیین کسر مولد کسر اعشاری متناوب ساده، یک دوره گردش را در صورت می‌نویسیم و در مخرج به تعداد ارقام دورهٔ گردش، ۹ می‌نویسیم.

۱۰ـ تعیین کسر مولد کسر اعشاری متناوب مرکب:

$$۰/۲\overline{۵۱} = \frac{۲۵۱ - ۲}{۹۹۰} = \frac{۲۴۹}{۹۹۰}$$

$$۰/۲۰\overline{۷} = \frac{۲۰۷ - ۲۰}{۹۰۰} = \frac{۱۸۷}{۹۰۰}$$

$$۰/۰۱\overline{۴۵} = \frac{۰۱۴۵ - ۰۱}{۹۹۰۰} = \frac{۱۴۴}{۹۹۰۰}$$

قاعده: برای تعیین کسر مولد کسر اعشاری متناوب مرکب ، جزء ثابت و دورهٔ گردش را به دنبال هم در صورت نوشته و جزء ثابت را از آن کم می‌کنیم و در مخرج به تعداد ارقام دورهٔ گردش ۹ و به‌تعداد ارقام جزء ثابت در سمت راست ۹ها صفر می‌گذاریم .

$$0/P\bar{Q} = \frac{PQ - P}{\underbrace{99\cdots9}_{\text{به تعداد ارقام } Q}\underbrace{000\cdots0}_{\text{به‌تعداد ارقام } P}}$$

چند مثال: مجموع زیر را حساب کنید :

$$S = (x+1)+(x^2+2)+(x^3+3)+\ldots+(x^n+n)$$

$$S = (x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)+(1+2+3+\ldots+n)$$

$$S = \frac{x-x^n.x}{1-x} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{x-x^{n+1}}{1-x} + \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال ۲۲: مجموع زیر را حساب کنید :

$$A = 9+99+999 + \cdots + \underbrace{999\cdots9}_{n \text{ مرتبه}}$$

$$A = (10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(\underbrace{1000\cdots0}_{n \text{ مرتبه}}-1)$$

$$A = \frac{10^{n+1}-10}{9} - n$$

چرا ؟

مثال ۲۳: اگر $\log a$ و $\log b$ و $\log c$ جمل متوالی یک تصاعد حسابی باشند ثابت‌کنید، a و b و c جمل متوالی یک تصاعد هندسی هستند و بالعکس.

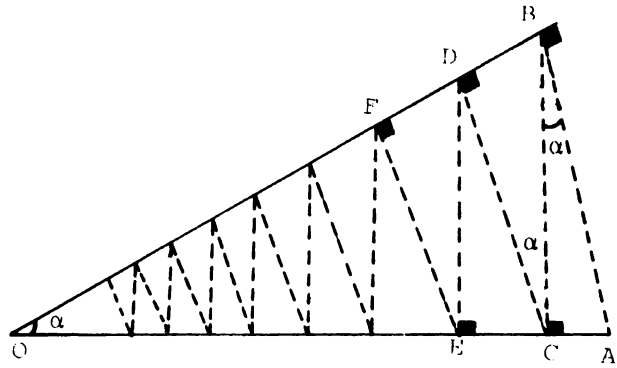
$$\div \log a . \log b . \log c \iff 2\log b = \log a + \log c \iff$$

$$\log b^2 = \log a.c \iff b^2 = a.c \iff \because a:b:c$$

مثال ۲۴: در شکل صفحه بعد $oA=1$ و عمودهای AB و BC و CD و DE و ... را متناوبا" بر اضلاع oB و oA فرود آورده‌ایم . مطلوب است حد مجموع طول این عمودها وقتی تعداد آنها به سمت بینهایت میل کند .

در مثلث قائم‌الزاویه oAB ($B = 90^\circ$) داریم :

$$\sin\alpha = \frac{AB}{oA} = \frac{AB}{1} \Rightarrow \boxed{AB = \sin\alpha}$$



در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($C=90^\circ$)و $\hat{B}=\alpha$ (چرا؟) می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha=\frac{BC}{AB} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{BC}{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{BC=\sin\alpha\cos\alpha}$$

در مثلث قائم‌الزاویه BCD($D=90^\circ$) و $\hat{C}=\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha=\frac{CD}{BC} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{CD}{\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{CD=\sin\alpha\cos^2\alpha}$$

و به همین ترتیب : $DE=\sin\alpha\cos^3\alpha$, $EF=\sin\alpha\cos^4\alpha$ و ...

بنابراین

$$S=AB+BC+CD+DE+\ldots\ldots$$

$$S=\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos^3\alpha+\ldots\ldots$$

در این تصاعد هندسی $a_1=\sin\alpha$ و $r=\cos\alpha$ و چون α حاده است داریم:

$0<r<1$ بنابراین:

$$\text{حد}\quad S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\cot g\frac{\alpha}{2}$$

به عنوان مثال اگر $\alpha=60^\circ$ آنگاه $\text{حد}\quad S=\cot g 30^\circ=\sqrt{3}$

مثال ۲۵: مجموع زیر را حساب کنید:

$$S'=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots+10x^9 \qquad (1)$$

اگر از طرفین رابطهٔ (۱) انتگرال بگیریم:

$$S=x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ldots+x^{10}=\frac{x^{11}-x}{x-1}$$

بنابراین:

$$S'=\left(\frac{x^{11}-x}{x-1}\right)'=\frac{10x^{11}-11x^{10}+1}{(x-1)^2}$$

راه دوم:

$$S' = 1+2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 10x^9$$

$$S_1 = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^9 = \frac{1-x^{10}}{1-x}$$

$$S_2 = \quad x + x^2 + x^3 + \ldots + x^9 = x\left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)$$

$$S_3 = \quad x^2 + x^3 + \ldots + x^9 = x^2\left(\frac{1-x^8}{1-x}\right)$$

$$S_4 = \quad x^3 + \ldots + x^9 = x^3\left(\frac{1-x^7}{1-x}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$S' = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_{10}$$

ادامهٔ کار و محاسبهٔ S' را به عهده خوانندگان عزیز می‌گذاریم.

مسائل

۱ـ ثابت کنید اگر a و b و c و d چهارجمله متوالی یک تصاعد هندسی باشندداریم :

$$(b - c)^2 + (c-a)^2 + (d-d)^2 = (a - d)^2$$

۲ـ مطلوبست تعیین چهار جمله متوالی یک تصاعد هندسی بنابرآنکه مجموع دومی و سومی a و مجموع اولی و چهارمی b باشد و بحث در مسئله.

۳ـ ثابت کنید اگر a و b و c سه‌جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی باشند، آنگاه

$$a^2b^2c^2(a^{-3} + b^{-3} + c^{-3}) = a^3 + b^3 + c^3$$

آیا عکس این حکم صحیح است. (عکس حکم بدون رعایت ترتیب سه عدد صحیح است).

۴ـ ثابت کنید اگر x و y و z جمل متوالی یک تصاعد هندسی باشند، آنگاه:

$$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$$

و بالعکس.

۵ـ به کمک مسئله ۴ سه‌عدد مثبت پیداکنید که مجموعشان S و مجموع مربعاتشان C باشد. و این سه عدد جمل متوالی یک تصاعد هندسی باشند. مثال عددی: $S = ۲۱$ و $C = ۱۸۹$ (شرط امکان جواب : $C \leqslant S^2 \leqslant 3C$)

۶ـ علی و حسین قرار گذاشتند که:

روز اول بهمن ماه علی ۱ ریال و روز دوم ۲ ریال و روز سوم ۴ ریال و روز چهارم ۸ ریال و ... تا روز پانزدهم بهمن به همین منوال پول به حسین بدهد.

حسین روز شانزدهم بهمن ۱۰ تومان و روز هفدهم ۲۰ تومان و روز هیجدهم ۳۰ تومان و روز نوزدهم ۴۰ تومان و ... تا روز سی‌ام بهمن به همین منوال پول به علی بدهد. کدام یک در این قرارداد سود بیشتری می‌برند؟

تست‌های تصاعد هندسی

۱ـ در یک تصاعد هندسی ، جمله پنجم مساوی ۸ و جمله هشتم مساوی ۶۴ است . جملهٔ اول این تصاعد چقدر است ؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۲

۲ـ در یک تصاعد هندسی با جملات مثبت ، هر جمله برابر است با مجموع دو جملهٔ قبلی آن ، قدرنسبت این تصاعد برابر است با :

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$

۳) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

۳ـ در یک تصاعد هندسی ، جملهٔ سوم مساوی است با جمله دوم به‌علاوهٔ دو برابر جملهٔ اول ، کدام دو عدد می‌توانند قدر نسبت این تصاعد باشند ؟

۱) ۱ـ و ۲ـ ۲) ۱ـ و ۲

۳) ۱ و ۲ ۴) ۱ و ۲ـ

۴ـ در یک تصاعد هندسی حاصل ضرب جملهٔ چهارم و هشتم آن برابر ۸ است . جمله‌ششم این تصاعد کدام است ؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲

۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۵ـ در یک تصاعد هندسی مجموع سه‌جمله اول ۱۱۲ و مجموع شش جمله اول ۱۲۶ است . قدر نسبت این تصاعد کدام است ؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶ـ مجموع n جملهٔ یک تصاعد هندسی $S_n = \frac{۱}{۲}(۱-۲^n)$ است . جمله عمومی آن کدام است

۱) 2^{n-1} ۲) 2^{n-2}

۳) 2^{n} ۴) هیچکدام

۷ـ اگر جملات دوم و هشتم یک تصاعد هندسی ۶ و $\frac{1}{2}$ باشد، جملهٔ چهاردهم آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{24}$

۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{18}$

۸ـ اگر مجموع جملات اولیه تصاعد هندسی از دستور $S_n = 3(1-2)^n$ به‌دست بیاید. جمله دوم این تصاعد کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶

۳) ۹ـ ۴) ۱۸

۹ـ مجموع سه‌جمله اول یک‌تصاعد هندسی نزولی ۵ برابر جمله دوم است. قدرنسبت این تصاعد کدام‌است؟

۱) $3-\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{3}$

۳) $2+\sqrt{3}$ ۴) $3+\sqrt{2}$

۱۰ـ در یک‌تصاعد هندسی جمله نهم ۱۶ برابر جمله پنجم است. جملهٔ پنجم این‌تصاعد کدام‌است)

۱) $12a_1$ ۲) $16a_1$

۳) $\pm 8a_1$ ۴) $\pm 32a_1$

۱۱ـ اگر بین دو عدد $2\sqrt{2}$ و $256\sqrt{2}$ شش واسطه هندسی درج کنیم، حاصل‌ضرب آن ۶ جمله برابر است با:

۱) $(1024)^3$ ۲) $(1024)^2$

۳) $(1024)^4$ ۴) ۱۰۲۴

۱۲ـ اگر بین دو عدد ۱ و ۲۵۶ سه واسطه هندسی درج کنیم، جملهٔ وسط برابر است با:

۱) ۱۶ ۲) ۱۶ـ

۳) گزینه ۱ و ۲ درست است ۴) هیچکدام

۱۳ــ در یک تصاعد هندسی قدر نسبت ۳ و تفاضل دو جملهٔ چهارم و ششم ۴۳۲ است. جملهٔ اول این تصاعد برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۴ــ برای آنکه سه‌مقدار 8^x و 16^y و 32^z تشکیل تصاعد هندسی بدهند، باید:

۱) $y^2 = zx$ ۲) $x + y = 2y$

۳) $3x + 5z = 8y$ ۴) $3x + 5y + 8z = 0$

۱۵ــ هرگاه $\log a$ و $\log b$ و $\log c$ جمله‌های متوالی یک تصاعد هندسی باشند $\log_a^x, \log_b^x, \log_c^x$:

۱) تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند ۲) تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند

۳) تشکیل تصاعد توافقی می‌دهند ۴) تشکیل تصاعد نمی‌دهند

۱۶ــ در یک‌تصاعد هندسی تفاضل جملات اول و سوم برابر ۹ و تفاضل جملات سوم وپنجم برابر ۳۶ است. جمله اول تصاعد کدام است؟

۱) ۲ــ ۲) ۲

۳) ۳ــ ۴) ۳

۱۷ــ در یک تصاعد هندسی مجموع $2n$ جملهٔ اول سه‌برابر مجموع جملات ردیف فرد است قدر نسبت تصاعد کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲ــ

۳) ۳ ۴) ۳ــ

۱۸ــ حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی چهار برابر جمله اول است. قدر نسبت این تصاعد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{7}{8}$

۱۹ــ جمله عمومی یک تصاعد هندسی، $a_n = 2(-\frac{1}{2})^n \quad (n \geqslant 1)$ است، حد مجموع جملات کدام است؟

۱) -۲ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $+۲$

۲۰ـ حد مجموع یک‌تصاعد هندسی $\frac{a}{۱-q}$ است که در آن a جملهٔ اول و q قدرنسبت‌است حد مجموع تصاعدی که جملاتش به‌ترتیب مجذور جملات تصاعد فوق باشد ، کدام‌است ؟

۱) $\frac{a^2}{(۱-q)^2}$ ۲) $\frac{a^2}{۱-q^2}$

۳) $\frac{a^2}{۱+q^2}$ ۴) $\frac{۴a^2}{۱+q^2}$

۲۱ـ مجموع بی‌نهایت جملهٔ یک‌تصاعد هندسی نامتناهی برابر ۶ و مجموع دو جملهٔ اول آن $۴\frac{۱}{۲}$ است . اولین جملهٔ این تصاعد برابر است با :

۱) ۳ ـ یا $۱\frac{۱}{۳}$ ۲) ۱

۳) $۲\frac{۱}{۲}$ ۴) ۳ یا ۹

۲۲ـ در یک تصاعد هندسی نزولی هرجمله برابر حد مجموع جملات بعد از آن است . قدر نسبت تصاعد کدام است :

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$

۲۳ـ اگر $\frac{۱}{۳} > a > ۰$ و $\frac{۱}{۲} = \frac{۱+a+a^2+\dots}{۱+۲a+۴a^2+\dots}$ باشد ، a کدام‌است ؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۴ـ اگر $|x| > ۱$ باشد ، حد مجموع $۱+۲x+۳x^2+۴x^3+\dots$ برابر است با

۱) $(x-۱)^{-2}$ ۲) $-(x-۱)^{-2}$

۳) $(۱-x^2)^{-1}$ ۴) $x(x-۱)^{-1}$

۲۵ـ a چقدر باشد تا حد مجموع جملات تصاعد $۲a, a\sqrt{۳}, a, \dots\dots$ برابر ۸ گردد .

۱) $4(1-\sqrt{2})$ ۲) $4(\sqrt{2}-1)$

۳) $2(2-\sqrt{2})$ ۴) $2(2+\sqrt{2})$

۲۶ـ اگر S_1 حد مجموع جملات ردیف فرد و S_2 حد مجموع جملات ردیف زوج تصاعد هندسی نزولی با قدرنسبت q باشد، $\frac{S_2}{S_1}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) q

۳) $\frac{1}{q}$ ۴) q^2

۲۷ـ اگر داشته باشیم $\log_8^x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \ldots = \frac{1}{2}$ ، x برابر است با

۱) ۸ ۲) ۶

۳) ۴ ۴) ۲

۲۸ حد مجموع $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots + \frac{1}{a^n}$ وقتی $n \to \infty$ و $0 < a < 1$ ∴ برابر است با:

۱) $+\infty$ ۲) صفر

۳) $\frac{1}{a+1}$ ۴) $\frac{1}{a-1}$

۲۹ـ اگر $n \in N$ و $5^n + 5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots = \frac{125}{4}$ باشد، آنگاه

۱) $n = 1$ ۲) $n = 2$

۳) $n = 3$ ۴) $n = 4$

۳۰ـ کسر $\frac{x}{250}$ به ازاء هر عضو مجموعهٔ $A=\{x|x \in N, x<250\}$

۱) مولد کسر اعشاری حقیقی است ۲) مولد کسر اعشاری متناوب ساده است

۳) مولد کسر اعشاری متناوب مرکب است ۴) به مقدار x بستگی دارد

۳۱ـ اگر کسر $\frac{11}{5120}$ را به اعشاری تبدیل کرده، عمل را ادامه دهیم تا به باقیماندهٔ صفر برسیم، تعداد ارقام اعشاری کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۳۲ـ کسر مولد ۰/۰۰۷۰۷۰۷۰ . . . . برابر است با:

۱) $\frac{۷}{۹۹۰}$ ۲) $\frac{۷}{۹۰۰}$

۳) $\frac{۷}{۹}$ ۴) $\frac{۷۰۷}{۹۹۹۰۰}$

۳۳ـ اگر $۰/۸۸۸...=\frac{a+۱}{a+۲}$ باشد، a کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۱

۳۴ـ واسطه توافقی بین دو عدد $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ برابر است با:

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$

۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) هیچکدام

۳۵ـ اگر نسبت واسطهٔ توافقی به‌واسطهٔ هندسی دو عدد مثل ۱۲ به ۱۳ باشد. نسبت واسطه هندسی به واسطهٔ عددی آنها کدام است؟

۱) ۱۲ به ۱۳ ۲) ۱۳ به ۱۲

۳) ۱۵۶ به ۲۵ ۴) هیچکدام

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	پاسخ تست‌های تصاعد هندسی
۱	۲	$\begin{cases} a_5 = ۸ \\ a_8 = ۶۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1r^4 = ۸ \\ a_1r^7 = ۶۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1r^4}{a_1r^7} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow r^3 = ۸$ $\Rightarrow r = ۲ \Rightarrow a_1 = \frac{۱}{۲}$
۲	۳	چون درصورت مسائله قید شده است که جملات تصاعد جملگی مثبت هستند پس $r > ۰$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow a_1r^{n-1} = a_1r^{n-2} + a_1r^{n-3}$ (۱) اگر طرفین رابطه (۱) را بر $a_1r^{n-1} \neq ۰$ تقسیم کنیم خواهیم داشت: $r^2 - r - ۱ = 0 \Rightarrow r = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$
۳	۲	$a_3 = a_2 + ۲a_1 \Rightarrow a_1r^2 = a_1r + ۲a_1, a_1 \neq o \Rightarrow$ $r^2 - r - ۲ = o \Rightarrow \begin{matrix} r = ۲ \\ r = -۱ \end{matrix}$
۴	۳	$(a_6)^2 = a_4 . a_8 \Rightarrow (a_6)^2 = ۸ \Rightarrow a_6 = \pm ۲\sqrt{۲}$
۵	۴	$S_3 = a_1 . \frac{1-r^3}{1-r}$ $S_6 = a_1 . \frac{1-r^6}{1-r}$ $\Rightarrow \frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{1+r^3} \Rightarrow$ $\frac{۱۱۲}{۱۲۶} = \frac{۱}{۱+r^3} \Rightarrow r^3 = \frac{۱}{۸} \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}$
۶	۲	$a_n = S_n - S_{n-1} = ½(2^n - 1) - ½(2^{n-1} - 1) \Rightarrow$ $a_n = ½(2^n - 2^{n-1}) \Rightarrow a_n = 2^{n-2}$
۷	۲	$(a_8) = a_2 . a_{14} \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^2 = ۶a_{14} \Rightarrow a_{14} = \frac{۱}{۲۴}$
۸	۲	$a_2 = S_2 - S_1 = ۳(۲^۲ - ۱) - ۳(۲^۱ - ۱) \Rightarrow a_2 = ۶$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
۹	۲	$S_3=5a_2 \Rightarrow a_1.\frac{1-r^3}{1-r}=5a_1.r$ (۱) اگر طرفین رابطهٔ (۱) رابر a_1 تقسیم کنیم ، پس از ساده شدن داریم : $r^2-4r+1=0 \Rightarrow r=2\pm\sqrt{3}$ چون درصورت مساله قید شده است که تصاعد نزولی است جواب $r=2-\sqrt{3}$ قابل قبول است زیرا $1>0.3\sim 2-\sqrt{3}$
۱۰	۲	$a_9=16a_5 \Rightarrow a_1r^8=16a_1r^4 \Rightarrow r=\pm 2$ $a_5=a_1r^4 \Rightarrow a_5=16a_1$
۱۱	۲	$2\sqrt{2}$ و ... و ... و ... و ... و $256\sqrt{2}$ اگر حاصل ضرب آن ۶ جمله را P به‌نامیم ، با توجه به‌اینکه در هر تصاعد هندسی حاصل‌ضرب دو جمله متساوی الفاصله از طرفین برابر است با حاصل‌ضرب دو جمله اول و آخر ، لذا : $P=(2\sqrt{2})(256\sqrt{2})^3=(1024)^3$
۱۲	۳	۱ و .... و ... و ۲۵۶ اگر جمله وسط را x به‌نامیم ، خواهیم داشت : $x^2=1\times 256=256$ و $x=\pm 16$
۱۳	۲	$a_6-a_4=432$ $\quad a_1(r^5-r^3)=432$ $r=3$ $\quad r=3$ $\quad \Rightarrow a_1=2$
۱۴	۳	$\because 8^x, 16^y, 32^z \Rightarrow (16^y)^2=(8^x)(32^z) \Rightarrow$ $2^{8y}=2^{3x+5z} \Rightarrow 3x+5z=8y$
۱۵	۱	$\because \log a : \log b : \log c \Rightarrow (\log b)^2=\log a.\log c$ (۱) $\log_b^x=\frac{\log x}{\log b} \Rightarrow (\log_b^x)^2=\frac{\log^2 x}{\log^2 b}$ (۲) $\log_a^x.\log_c^x=\frac{\log x}{\log a}.\frac{\log x}{\log c}=\frac{\log^2 x}{\log a.\log c}$ (۳)

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
		با توجه به روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم : $(\log_b^x)^2 = \log_b^x . \log_b^x$ لذا این سه‌عدد تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند .
۱۶	۴	$\begin{cases} a_3 - a_1 = ۹ \\ a_5 - a_3 = ۳۶ \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 r^2 - a_1 = ۹ \\ a_1 r^4 - a_1 r^2 = ۳۶ \end{cases} \Rightarrow$ $\frac{a_1(r^2 - ۱)}{a_1 r^2 (r^2 - ۱)} = ¼ \quad \Rightarrow r \pm ۲$ $a_1(r^2 - ۱) = ۹ \quad \Rightarrow a_1 = ۳$
۱۷	۱	در هر تصاعد هندسی ، جملات ردیف فرد ، تصاعد هندسی دیگری تشکیل می‌دهند که قدر نسبت آن مجذور قدر نسبت تصاعد اول است . چرا ؟ $\because a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{2n}$ $S_{2n} = a_1 . \frac{1 - q^{2n}}{1 - q}$ $\because a_1, a_3, a_5, \ldots. a_{2n-1}$ تعداد جملات این تصاعد n است . $S = a_1 . \frac{1 - (q^2)^n}{1 - q^2} = \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}$ با توجه به‌صورت مساله داریم : $S_{2n} = ۲S$ $a_1 . \frac{1 - q^{2n}}{1 - q} = 3a_1 . \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}$ با توجه به‌اینکه $q \neq ۱$ پس از ساده شدن داریم $q^2 - ۳q + ۲ = ۰$ و جواب $q = ۲$ قابل قبول است .
۱۸	۲	$\frac{a_1}{۱ - r} = ۴a_1, a_1 \neq o \quad \Rightarrow r = \frac{۳}{۴}$
۱۹	۳	$a_n = ۲(-\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = ۲(-\frac{۱}{۲}) - ۱ \\ a_2 = ۲(-\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲} \end{matrix} \Rightarrow r = -\frac{۱}{۲}$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
		حد $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{-1}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$
۲۰	۲	هرگاه جملات یک تصاعد هندسی را مجذور کنیم ، تصاعد هندسی دیگری به‌دست می‌آید که قدرنسبت آن مجذور قدر نسبت تصاعداول است . حد $S = \frac{a^2}{1-q^2}$
۲۱	۲	چون مجموع محدود و برابر ۶ است ، پس تصاعد نزولی است $\begin{cases} \frac{a_1}{1-r} = 6 \\ a_1 + a_1 r = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 6(1-r) \\ a_1(1+r) = \frac{9}{2} \end{matrix} \Rightarrow$ $6(1-r)(1+r) = \frac{9}{2} \Rightarrow r = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow$ $r = +\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 3$ $r = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 9$
۲۲	۱	چون گزاره به‌وسیله سور عمومی بیان شده است ، پس در حالت خاص زیر نیز صادق است : جملهٔ اول برابر است با حد مجموع جملات بعد از آن : $a_1 = \frac{a_2}{1-r} \Rightarrow a_1 = \frac{a_1 r}{1-r}, \ a_1 \neq 0 = r = \frac{1}{2}$
۲۳	۴	$\frac{1+a+a^2+\ldots\ldots}{1+2a+4a^2+\ldots\ldots} = \frac{1}{2}$ صورت و مخرج کسر طرف اول ، هرکدام مجموع بی‌نهایت جمله از یک تصاعد نزولی هستند زیرا $0 < a < \frac{1}{2}$ $\frac{\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{1-2a}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-2a}{1-a} = \frac{1}{2} \quad a = \frac{1}{3}$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
۲۴	۱	$S' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ اگر از طرفین متساوی انتگرال بگیریم $S = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\dots\dots$ حد $S = \frac{x}{1-x} \Rightarrow$ حد $S' = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$ حد $S' = (x-1)^{-2}$
۲۵	۳	$\because 2a, a\sqrt{2}, a, \dots \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ $S = \frac{2a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a}{2-\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{4a}{2-\sqrt{2}} = 8 \Rightarrow a = 2(2-\sqrt{2})$
۲۶	۲	در هر تصاعد هندسی جملات ردیف زوج و جملات ردیف فرد ، هر کدام تصاعد هندسی با قدر نسبت مساوی مجذور قدر نسبت تصاعد اولیه تشکیل می‌دهند . چرا؟ $\because a_2, a_4, a_6, \dots\dots$ $S_2 = \frac{a_2}{1-q^2} = \frac{a_1 q}{1-q^2}$ (۱) $\because a_1, a_3, a_6, \dots$ $S_1 = \frac{a_1}{1-q^2}$ (۲) از تقسیم طرفین روابط (۱) و (۲) داریم : $\frac{S_2}{S_1} = q$
۲۷	۴	$\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \dots\dots\dots = \frac{1}{2}$ با توجه به‌طرف دوم معادله ، معلوم می‌شود که باید برای طرف اول حد موجود باشد یعنی $-1 < \log x < 1$ ، $x \neq 1$ پس باید داشته باشیم : $\frac{1}{8} < x < 8 \qquad x \neq 1$ $\frac{\log_8^x}{1-\log_8^x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_8^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
۲۸	۱	$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\dots+\frac{1}{a^n} \Rightarrow r=\frac{1}{a}$ $0<a<1 \Rightarrow r>1$ بنابراین اگر بی‌نهایت جمله از این تصاعد را جمع کنیم حاصل بی‌نهایت می‌شود .
۲۹	۲	$5^n+5^{n-1}+5^{n-2}+\dots=\frac{125}{4}$ $a_1=5^n \qquad r=\frac{1}{5}$ حد $S=\frac{5^n}{1-\frac{1}{5}}=\frac{125}{4}\Rightarrow 5^{n+1}=5^3 \Rightarrow n=2$
۳۰	۱	مولد کسر اعشاری حقیقی است $\frac{x}{250}=\frac{x}{5^3\times 2}$ زیرا در تجزیه مخرج به‌حاصل‌ضرب عوامل اول فقط عامل ۲ و ۵ موجود است .
۳۱	۳	$\frac{11}{5120}=\frac{11}{2^{10}\times 5}$ کسر مزبور مولد اعشاری حقیقی است و تعداد ارقام اعشار آن برابر است با : $\text{Max}\{1 \text{ و } 10\}=10$
۳۲	۱	$0/00707070\dots=\frac{007-0}{990}=\frac{7}{990}$
۳۳	۱	$\frac{a+1}{a+2}=0/888\dots \Rightarrow \frac{a+1}{a+2}=\frac{8}{9} \Rightarrow a=7$
۳۴	۲	اگر H واسطه توافقی بین دو عدد a و b باشد : $H=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2(\frac{1}{3})(\frac{1}{4})}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{2}{7}$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
۳۵	۱	اگر A واسطه عددی ، G واسطه هندسی و H واسطه توافقی بین دو عدد a و b باشد می‌دانیم که $G^2 = A.H \Leftrightarrow \frac{H}{G} = \frac{G}{A} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۳} = \frac{G}{A}$

تصاعد توافقی

تعریف : هرگاه جملات یک‌تصاعد حسابی را معکوس کنیم ، دنباله‌ای از اعداد به‌دست می‌آید که به‌موجب‌تعریف می‌گوییم تشکیل تصاعد توافقی می‌دهند .

مثال ۱ــ دنباله

$$\frac{۱}{۲} \text{ و } \frac{۳}{۲} \text{ و } \frac{۵}{۲} \text{ و } \frac{۷}{۲} \text{ و } \frac{۹}{۲} \text{ و } \ldots$$

یک تصاعد حسابی است که در آن $d = ۱$ می‌باشد بنابراین دنبالهٔ

$$۲ \text{ و } \frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{۲}{۵} \text{ و } \frac{۲}{۷} \text{ و } \frac{۲}{۹} \text{ و } \ldots$$

یک تصاعد توافقی است .

مثال ۲ــ درحالت کلی جملات یک تصاعد توافقی عبارتند از :

$$\frac{۱}{a_1}, \frac{۱}{a_1+d}, \frac{۱}{a_1+۲d}, \frac{۱}{a_1+۳d}, \ldots\ldots, \frac{۱}{a_1+(n-۱)d}$$

مثال ۳ــ بین اعداد $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۳۳}$ چهار واسطه توافقی درج کنید .

ابتدا بین اعداد ۳ و ۳۳ چهار واسطه حسابی درج کرده آنگاه آنها را معکوس می‌کنیم .

۳ و ... و ... و ... و ... و ۳۳

$$d = \frac{۳۳-۳}{۴+۱} = ۶$$

۳ و ۹ و ۱۵ و ۲۱ و ۲۷ و ۳۳

واسطه‌های توافقی عبارتند از $\frac{۱}{۹}$ و $\frac{۱}{۱۵}$ و $\frac{۱}{۲۱}$ و $\frac{۱}{۲۷}$

به‌عبارت دیگر دنبالهٔ $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۹}$ و $\frac{۱}{۱۵}$ و $\frac{۱}{۲۱}$ و $\frac{۱}{۲۷}$ و $\frac{۱}{۳۳}$ یک تصاعد توافقی است .

تعریف : اگر سه عدد a و H و b تشکیل تصاعد توافقی دهند ، H را واسطه توافقی بین دو عدد a و b می‌نامیم و باید داشته باشیم :

$$\frac{۱}{H} - \frac{۱}{a} = \frac{۱}{b} - \frac{۱}{H}$$

چرا؟

و از آنجا که :

$$\frac{۲}{H} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} \Leftrightarrow H = \frac{۲ab}{a+b}$$

مثال ۴ــ واسطه توافقی بین ۲ و ۳ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

$$H = \frac{۲(۲)(۳)}{۲+۳} = \frac{۱۲}{۵}$$

مثال ۵ــ اگر A واسطه حسابی ، G واسطه هندسی و H واسطه توافقی بین دو عدد a و b باشد . ثابت کنید : $G^2=A.H$ یعنی واسطه هندسی دو عدد ، همچنان واسطه هندسی است بین واسطه حسابی و واسطهٔ توافقی آن دو عدد .

$$A = \frac{a+b}{۲} \qquad G = \sqrt{ab} \qquad H = \frac{۲ab}{a+b}$$

$$G^2 = ab \qquad \Rightarrow G^2 = A.H$$
$$A.H = ab$$

مثال ۶ــ در یک تصاعد توافقی ، $a_p = q$ و $a_q = p$ ثابت کنید $a_{p+q} = \frac{pq}{p+q}$

مساله معادل است با اینکه بگوئیم : در یک تصاعد عددی $a_p = \frac{۱}{q}$ و $a_q = \frac{۱}{p}$ مطلوب است .

$$\begin{cases} a'_p = \frac{۱}{q} \\ a'_q = \frac{۱}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + (p-۱)d = \frac{۱}{q} \\ a_1 + (q-۱)d = \frac{۱}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'_1 = \frac{۱}{pq} \\ d = \frac{۱}{pq} \end{cases}$$

$$a'_{p+q} = \frac{۱}{pq} + (p+q-۱)\frac{۱}{pq} \Rightarrow a'_{p+q} = \frac{p+q}{pq}$$

پس جمله p+q ام تصاعد توافقی عکس مقدار اخیر است

$$a_{p+q} = \frac{۱}{a'_{p+q}} = \frac{pq}{p+q}$$

لگاریتم

۱ ــ تعریف لگاریتم :

تساوی $N=b^y$ را در نظر می‌گیریم . فرض می‌کنیم‌که $b>0$ و $b\neq 1$ در این صورت عدد حقیقی N مثبت خواهد بود . چرا ؟

به موجب تعریف عدد حقیقی y را لگاریتم N در مبنای (پایه‌ی) b می‌نامیم و چنین می‌نویسیم :

$$\boxed{y = \log_b N}$$

توجه کنید : $y=\log_b N \iff N = b^y$

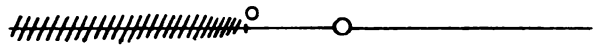
یعنی برحسب نیاز می‌توان از روی تساوی‌لگاریتمی به‌تساوی توان و از تساوی توان به تساوی لگاریتمی رسید .

مثال ۱: $8 = 2^3 \iff \log_3 8 = 2$

مثال ۲: $\sqrt{5} = 25^{\frac{1}{4}} \iff \log_{25} \sqrt{5} = \frac{1}{4}$

مثال ۳: $0/01 = 10^{-2} \iff \log_{10} 0/01 = -2$

انواع لگاریتم برحسب آنکه‌مبنای لگاریتم‌بزرگتر از ۱ بوده و یا کوچکتر از ۱ و بزرگتر از صفر باشد ، با دو نوع لگاریتم سروکار داریم .



الف: $b > 1$، این نوع لگاریتم را " نوع اول " نامگذاری می‌کنیم .

به این مثالها توجه کنید :

$$25 = 5^{2} \iff \log_{5} 25 = 2$$

$$\frac{۱}{۱۲۵} = ۵^{-۳} \iff \log_{5} \frac{۱}{۱۲۵} = ۳$$

آیا می‌توان گفت:

وقتی مبنا بزرگتر از یک باشد، لگاریتم اعداد بزرگتر از یک مثبت و لگاریتم اعداد کوچکتر از یک منفی است.

ب: $0 < b < 1$ این نوع لگاریتم را " نوع دوم " نامگذاری می‌کنیم،

به این مثالها توجه کنید:

$$\frac{۱}{۱۶} = (\frac{۱}{۲})^{۴} \implies \log_{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۱۶} = ۴$$

$$۸ = (\frac{۱}{۲})^{-۳} \implies \log_{\frac{۱}{۲}} ۸ = -۳$$

آیا می‌توان گفت:

وقتی مبنا کوچکتراز یک باشد،لگاریتم اعداد کوچکتر از یک مثبت و لگاریتم‌اعداد بزرگتر از یک منفی است.

به جدول زیر توجه کنید:

توان / عدد	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲	۳
۲	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۸
$\frac{۱}{۲}$	۸	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$

عدد ۲ بزرگتر از یک است و مرتبا" به توانهای ۳-، ۲-، ۱-، ۰، ۱، ۲ و ۳ رسیده است. در این حالت هرچه توان بزرگتر شود، حاصل نیز بزرگتر می‌شود. به‌طورکلی:

$$\boxed{b > 1 \quad , \quad m > n \implies b^{m} > b^{n}}$$

عدد $\frac{۱}{۲}$ کوچکتر از یک است و مرتبا" به توانهای ۳-، ۲-، ۱-، ۰، ۱، ۲ و ۳ رسیده است. در این حالت هرچه توان بزرگتر شود، حاصل کوچکتر می‌شود. به طورکلی:

$$\boxed{0 < b < 1 \quad , \quad m > n \implies b^{m} < b^{n}}$$

با عنایت به این موضوع و تعریف لگاریتم دو مطلب مهم زیر نتیجه می‌شود:

اگر از طرفین یک نامساوی (که هر دو طرف مثبت است) در مبنای بزرگتر از یک لگاریتم بگیریم جهت نامساوی تغییر نمی‌کند . اما اگر در مبنای کوچکتراز یک (و بزرگتر از صفر) لگاریتم بگیریم جهت نامساوی تغییر می‌کند .

مثال ٤:

$$۲۵۶ > ۱۲۸ \implies \log_{۲} ۲۵۶ > \log_{۲} ۱۲۸$$

$$۸۱ > ۲۷ \implies \log_{\frac{۱}{۳}} ۸۱ < \log_{\frac{۱}{۲}} ۲۷$$

سئوال ۱ : آیا از تساوی $b^x = b^y$ همواره می‌توان $x=y$ را نتیجه گرفت ؟ $(b \neq 0)$

جواب : اگر $b = ۱$ آنگاه نمی‌توان $x = y$ را نتیجه گرفت

$$۱^۵ = ۱^{۵۰} \implies ۵ \neq ۵۰$$

و این مثال نقض نشان می‌دهد که پاسخ منفی است . آیا می‌توانید مثال نقض دیگری ذکر کنید ؟

۲ـ اگر $b \in (۰,۱) \cup (۱,+\infty)$ و a باشد آیا از تساوی $a^m = b^m$ همواره تساوی $a = b$ به دست می‌آید ؟

مثال نقض : اگر $m = ۰$ آنگاه $a=b$ نتیجه نمی‌شود .

$$7^۰ = 4^۰ \implies 7 \neq 4$$

اگر $m \neq ۰$ آنگاه پاسخ مثبت است .

۲ ـ آنتی‌لگاریتم (عدد ما به ازاء) : اگر داشته باشیم :

$$\log_b N = y$$

آنگاه عدد N را آنتی لگاریتم y می‌نامیم .

$$y = \log_b N \implies N = \text{ant} \log_b y$$

مثال:

$$2 = \log_{10} 100 \implies 100 = \text{ant} \log_{10} 2$$

اکنون باتوجه به تعریف لگاریتم چند مسئله حل می‌کنیم .

مثال ۵: $\log_4 2\sqrt{2}$ برابر است با :

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

$$\log_4 2\sqrt{2} = y \iff 2\sqrt{2} = 4^y \Rightarrow 2^{\frac{3}{2}} = 2^{2y} \Rightarrow 2y = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}$$

دقت کنید: باتوجه به مطالبی که گفته شد در وهلهٔ اول مشخص است که گزینه‌های (۲) و(۴) نادرست است.

مثال ۶: اگر داشته باشیم: $\log_{\sqrt{2}-1} N = -1$ ، N را پیدا کنید.

$$\log_{\sqrt{2}-1} N = -1 \Longrightarrow N = (\sqrt{2}-1)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$$

مثال ۷: اگر $\log_b \frac{1}{5} = -\frac{2}{3}$ آنگاه b برابر است با:

۱) $5\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt[3]{25}$ ۴) $5\sqrt[3]{5}$

$$\log_b \frac{1}{5} = -\frac{2}{3} \Longleftrightarrow \frac{1}{5} = b^{-\frac{2}{3}}$$

طرفین تساوی اخیر را به توان $-\frac{3}{2}$ می‌رسانیم

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} \Longleftrightarrow b = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = 5^{1\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$$

و گزینه (۱) درست است.

مثال ۸: ثابت کنید:

$$\boxed{\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a}$$

$$\log_b a = y \Longrightarrow a = b^y \Longrightarrow a^m = b^{my} \qquad (1)$$

رابطهٔ (۱) را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$a^m = (b^n)^{\frac{m}{n} y}$$

از رابطهٔ اخیر خواهیم داشت:

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} y \quad \text{(تعریف لگاریتم)}$$

و اگر به جای y مقدارش را قرار دهیم، داریم:

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

و قضیه ثابت است.

نتیجه ۱: اگر $m=n$ آنگاه داریم:

$$\boxed{\log_{b^m} a^m = \log_b a}$$

نتیجهٔ ۲: اگر $m = n = \frac{1}{p}$ آنگاه داریم:

$$\boxed{\log_{\sqrt[p]{b}} \sqrt[p]{a} = \log_b a}$$

نتیجهٔ ۳: اگر $m = 1$ و $n=n$ آنگاه داریم

$$\boxed{\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a}$$

به‌عنوان تمرین هر یک از نتایج (۱) و (۲) و (۳) را مستقیما" اثبات کنید.

از مثال ۴ و نتایج آن می‌توانیم به عنوان قضایائی در مورد لگاریتم در حل مسائل استفاده کنیم. به‌مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۹: اگر $\log_3 2 = \alpha$ مطلوبست $\log_9 16$

$$\log_9 16 = \log_{3^2} 2^4 = \frac{4}{2} \log_3 2 = 2\alpha$$

مثال ۱۰: اگر $\log_6 5 = \beta$ مطلوبست $\log_{6\sqrt{6}} 5$

نتیجهٔ ٤:

$$\boxed{\log_{6\sqrt{6}} 5 = \log_{6^{\frac{3}{2}}} 5 = \frac{1}{\frac{3}{2}} \log_6 5 = \frac{2}{3} \beta}$$

مثال ۱۱: اگر $\log_7 6 = a$ آنگاه $\log_{49} 36$ برابر است با:

۱) $2a$ ۲) a^2

۳) $\sqrt{a}$ ۴) $\frac{a}{2}$

نتیجهٔ ۱:

$$\boxed{\log_{36} 49 = \log_{7^2} 6^2 = \log_7 6 = a}$$

چند نکته مهمّ:

الف ــ لگاریتم عدد یک در هر مبنایی برابر صفر است.

$$1 = b^0 \Longleftrightarrow \log_b 1 = 0$$

ب ــ لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک در مبنای خودش برابر یک است:

$$b = b^1 \qquad \log_b b = 1$$

ج ــ چون مبنای لگاریتم مثبت انتخاب شده‌است لذا اعداد منفی لگاریتم ندارند.

$\log_2(1-\sqrt{3})$ = تعریف نشده $\qquad b>0, b\neq 1$

۳ــ قضایای لگاریتم

۱ــ لگاریتم حاصل‌ضرب چند عدد مثبت برابر است با مجموع لگاریتم‌های هر کدام.

$$\boxed{\log_b(A.B.C) = \log_b A + \log_b B + \log_b C}$$

اثبات:

$$\log_b A = y \Longleftrightarrow A = b^y \qquad (۱)$$

$$\log_b B = y' \Longleftrightarrow B = b^{y'} \qquad (۲)$$

$$\log_b C = y'' \Longleftrightarrow C = b^{y''} \qquad (۳)$$

اگر طرفین تساویهای (۱)و(۲) و (۳) را در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$(A.B.C) = b^y . b^{y'} . b^{y''}$$

$$(A.B.C) = b^{y+y'+y''} \overset{\text{به‌موجب تعریف لگاریتم}}{\Longleftrightarrow} \log_b(A.B.C) = y+y'+y''$$

اکنون اگر به‌جای y و y' و y'' مقادیرشان $\log_b A$ و $\log_b B$ و $\log_b C$ را بگذاریم، قضیه ثابت است.

مثال ۱۲: اگر $\log_5 2 = \alpha$ و $\log_5 3 = \beta$ مطلوبست محاسبهٔ

$\log_5 6$

$$\log_5 6 = \log_5 (2\times 3) = \log_5 2 + \log_5 3 = \alpha + \beta$$

مثال ۱۳: عبارت زیر را خلاصه کنید:

$$A = \log_x (2x-1) + \log_x (2x+1) + \log_x \frac{1}{4x^2-1} \qquad x > \frac{1}{2}$$

$$A = \log_x (2x-1)(2x+1)\cdot\frac{1}{4x^2-1} = \log_x \frac{4x^2-1}{4x^2-1} = \log_x 1 = 0$$

توجه کنید به ازاء $x > \frac{1}{2}$ هرکدام از عبارات $2x-1$ و $2x+1$ و $4x^2-1$ مثبت است.

۲ـ لگاریتم خارج‌قسمت دوعدد مثبت برابراست با لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسوم علیه

$$\boxed{\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B}$$

مانند قضیه (۱) شروع کنید و دو رابطهٔ (۱) و (۲) را برهم تقسیم کرده و...

۳ـ لگاریتم توان n ام یک عدد مثبت برابر است با n برابر لگاریتم آن عدد.

$$\log_b A^n = n \log_b A$$

اثبات: فرض می‌کنیم $n \in N$ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\log_b A^n = \log_b (\underbrace{A.A.A.....A}_{\text{n مرتبه}}) =$$

$$\log_b A + \log_b A + \log_b A + ...+ \log_b A = n \log_b A$$

۴ـ لگاریتم ریشه n ام یک عدد مثبت برابر است با $\frac{1}{n}$ لگاریتم آن عدد

$$\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_b A$$

اثبات: $\log_b A = y \iff A = b^y \qquad (1)$

از طرفین رابطه (۱) ریشهٔ n ام می‌گیریم:

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{b^y} = b^{\frac{y}{n}}$$

$$\sqrt[n]{A} = b^{\frac{y}{n}} \quad \overset{\text{به‌موجب تعریف لگاریتم}}{\iff} \quad \log_b \sqrt[n]{A} = \frac{y}{n}$$

اگر در رابطه اخیر به‌جای y قرار دهیم $\log_b A$ قضیه ثابت است.

توجه : در قضیه (۳) اگر n عددی گویا هم باشد قضیه درست است که از اثبات آن صرفنظر می‌کنیم .

مثال۱۴:عبارت زیر را با یک لگاریتم بنویسید :

$$A = \frac{2}{3}\log_x a + \frac{1}{5}\log_x b - \frac{1}{12}\log_x c$$

$$A = \log_x a^{\frac{2}{3}} + \log_x b^{\frac{1}{5}} - \log_x c^{\frac{1}{12}} = \log_x \frac{a^{\frac{2}{3}} . b^{\frac{1}{5}}}{c^{\frac{1}{12}}}$$

$$= \log_x \sqrt[60]{\frac{a^{40} . b^{12}}{c^5}}$$

مثال ۱۵: عبارت $B = \frac{y}{x^n}\sqrt{\frac{x^{2n+1}}{y^3}}$ را به وسیلهٔ لگاریتم مختصر کنید .

از طرفین تساوی در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم(لگاریتم اعشاری)و قرارداد می‌کنیم که از نوشتن مبنای ۱۰ خودداری کنیم .

چرا؟ $\log B = \log y - \log x^n + \frac{1}{2}\log x^{2n+1} - \frac{3}{2}\log y$

$$\log B = \log y - n\log x + \frac{2n+1}{2}\log x - \frac{3}{2}\log y$$

$$\log B = \log y - n\log x + n\log x + \frac{1}{2}\log x - \frac{3}{2}\log y$$

$$\log B = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\log y = \log\sqrt{\frac{x}{y}} \Longrightarrow B = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

مثال۱۶:معادلهٔ $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ را حل کنید .

واضح است که در این معادله $x > 0$ چرا؟

$$x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}x}$$

معادله را به صورت مقابل می‌توانیم بنویسیم

الف- ملاحظه می‌شود که $x = 1$ در معادله صدق می‌کند پس یکی از جوابها $x=1$ می‌باشد

ب - اگر $x \neq 1$ آنگاه می‌توان نوشت :

$\sqrt{x} = \frac{1}{2}x \Longrightarrow x = \frac{1}{4}x^2 \Longrightarrow x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$ یا $x = 4$

$x = 0$ قابل قبول نیست .

قضیه ۵: درستی تساوی زیر را اثبات کنید :

$$b^{\log_b N} = N$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\log_b N = y$ در این صورت خواهیم داشت :

$N = b^y$ اکنون اگر در رابطهٔ اخیر به‌جای y مقدارش $\log_b N$ را جایگزین‌کنیم به مطلوب مسئله می‌رسیم .

روش دوم : اگر لگاریتم‌های طرفین رابطهٔ

$$b^{\log_b N} = N$$

باهم برابر شوند ، نتیجه می‌گیریم که رابطه صحیح است .

$$\log_b(b^{\log_b N}) = \log_b N \cdot \log_b b = \log_b N \times 1 = \log_b N$$

(از طرف اول در مبنای b لگاریتم گرفته‌ایم) پس آنتی لگاریتم طرف اول همان N خواهد شد .

مثال ۱۷: مطلوبست محاسبه عبارت زیر :

$$A = (b)^{b^{\log_b(\log_b x)}}$$

به‌موجب قضیه ۴ داریم :

$$b^{\log_b(\log_b x)} = \log_b x$$

و لذا :

$$A = b^{\log_b x}$$

و اگر یکبار دیگر از قضیه استفاده کنیم :

$$A = X$$

به‌عنوان تمرین از طرفین لگاریتم بگیرید و درستی رابطه را اثبات کنید .

مثال ۱۸: درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید :

$$M^{\log_b N} = N^{\log_b M}$$

از طرفین رابطه در مبنای b لگاریتم می‌گیریم :

$$\log_b(M^{\log_b N})=\log_b(N^{\log_b M})\Rightarrow \log_b N.\log_b M=\log_b M.\log N$$

چون لگاریتم طرفین رابطه باهم برابرند پس تساوی درست است .

قضیهٔ ۶ ــ (قضیهٔ تغییر مبنا) :

$$\boxed{\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}}$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\log_b a=y$ در این صورت خواهیم داشت :

$$a=b^y$$

اکنون از طرفین این رابطه در مبنای c لگاریتم می‌گیریم :

$$\log_c a=\log_c b^y \Longrightarrow \log_c a=y.\log_c b$$

$$y=\frac{\log_c a}{\log_c b}\Longrightarrow \log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$$

نتیجه: اگر در قضیهٔ تغییرمبنا $c=a$ اختیار شود آنگاه:

$$\log_b a=\frac{\log_a a}{\log_a b}\Longrightarrow \boxed{\log_b a.\ \log_a b=1}$$

لذا

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a} \qquad \text{و یا} \qquad \log_b a=\frac{1}{\log_a b}$$

توجه داشته باشید که این روابط بسیار مهم بوده در مسائل کاربرد فراوان دارند .

مثال۱۹:اگر $\log_3 2=a$ و $\log_5 3=b$ باشد، $\log_5 2$ کدامست؟

۱) $a^{-1}b$ ۲) ab^{-1}

۳) $(ab)^{-1}$ ۴) ab

$$\log_3 2=\frac{\log_5 2}{\log_5 3}\Longrightarrow a=\frac{\log_5 2}{b}\Longrightarrow \log_5 2=ab$$

مثال۲۰:اگر $\log_3 2=m$ و $\log_3 5=n$ باشد مطلوبست

$\log_4 10$

$$\log_4 10 = \frac{\log_3 10}{\log_3 4} = \frac{\log_3 5\times 2}{\log_3 2^2} = \frac{\log_3 5 + \log_3 2}{2\log_3 2} = \frac{n+m}{2m}$$

مثال ۲۱: معادله لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$\log_3 x^2 + \log_x 3 = 3$$

باید $x>0$ و $x\neq 1$ باشد چرا؟

$$2\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = 3$$

چون $\log_3 x \neq 0$ چرا؟ طرفین معادله را در $\log_3 x$ ضرب می‌کنیم.

$$2(\log_3 x)^2 - 3(\log_3 x) + 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 & \Rightarrow x=3 \\ \log_3 x = \frac{1}{2} & \Rightarrow x=\sqrt{3} \end{cases}$$

مثال ۲۲:درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\boxed{\log_{\frac{a}{b}} N = \frac{\log_a N . \log_b N}{\log_b N - \log_a N}}$$

$$\log_{\frac{a}{b}} N = \frac{1}{\log_N \frac{a}{b}} = \frac{1}{\log_N a - \log_N b} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a N} - \frac{1}{\log_b N}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\log_b N - \log_a N}{\log_a N . \log_b N}} = \frac{\log_a N . \log_b N}{\log_b N - \log_a N}$$

در صفحه بعد فهرست قضایائی که تاکنون بیان و اثبات شده‌اند آمده است.

تمرین و ممارست در یادگیری آنها شما را در حل مسائل ورزیده‌تر خواهد ساخت.

۷ــ قضایای لگاریتم:

(۱) $\log_b (A.B.C) = \log_b A + \log_b B + \log_b C$

(۲) $\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$

(۳) $\log_b A^m = m \log_b A$

(۴) $\log_b \sqrt[m]{A} = \frac{1}{m} \log_b A$

(۵) $b^{\log_b N} = N$

(۶) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ " قضیه تغییرمبنا "

(۷) $\log_b a . \log_a b = 1$

(۸) $\log_{b^n} a^m = \log_b a$

(۹) $\log_{b^m} a^m = \log_b a$

(۱۰) $\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a$

(۱۱) $\log_{\sqrt[q]{b}} \sqrt[p]{a} = \frac{q}{p} \log_b a$

(۱۲) $\log_{\frac{a}{b}} N = \frac{\log_a N . \log_b N}{\log_b N - \log_a N}$

(۱۳) $M^{\log_b N} = N^{\log_b M}$

مثال۲۳: اگر $\log 2 = \alpha$ و $\log 3 = \beta$ آنگاه کدامیک از لگاریتم‌های زیر را نمی توان برحسب α و β محاسبه کرد؟

۱) $\log 72$ ۲) $\log 375$

۳) $\log 42$ ۴) $\log \frac{1}{60}$

$\log 72 = \log 2^3 \times 3^2 = 3\log 2 + 2\log 3 = 3\alpha + 2\beta$

$$\log 375=\log 3\times 125=\log\frac{3\times 1000}{2^3}=\log 3+\log 1000-3\log 2=\beta+3-3\alpha$$

$$\log\frac{1}{60}=\log\frac{1}{2\times 3\times 10}=\log 0-\log 2-\log 3-\log 10=-(\alpha+\beta+1)$$

چون در تجزیه ۴۲ فاکتور ۷ داریم (۴۲=۲×۳×۷) بنابراین جواب درست گزینه (۳) است

مثال۲۴:اگر $\log_3 2=a$ و $\log_4 3=b$ چه رابطه بین a و b موجود است؟

۱) $ab=2$ ۲) $ab=1$

۳) $ab=\frac{1}{2}$ ۴) $ab=-2$

درستی رابطه زیر از قضیه تغییرمبنا نتیجه می‌شود

$$\log_3 2.\log_4 3=\log_4 2$$

$$\log_3 2=\frac{\log_4 2}{\log_4 3}\Rightarrow a=\frac{\log_4 2}{b}\Rightarrow a.b=\log_4 2$$

اما می‌دانیم که $\log_4 2=\frac{1}{2}$ (چرا) . بنابراین $a.b=\frac{1}{2}$
و گزینه (۳) درست است .

مثال ۲۵:اگر $\log_b x=m$ مطلوبست $\log_x\sqrt[3]{b}$

۱) $\frac{1}{3}m$ ۲) $3m$

۳) $\frac{3}{m}$ ۴) $\frac{1}{3m}$

$$\log_x\sqrt[3]{b}=\frac{1}{3}\log_x b=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\log_b x}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{m}=\frac{1}{3m}$$

مثال۲۶:اگر $\log_2\{\log_3[\log_4 x]\}=0$ آنگاه x چقدر است؟
عدد داخل علامت{ } برابر یک است چون لگاریتم‌آن در مبنای ۲ صفر شده است .

$$\log_3[\log_4 x]=1\Longrightarrow\log_4 x=3\Longrightarrow x=4^3=64$$

عدد داخل علامت [ ] برابر ۳ است . زیرا لگاریتم آن در مبنای ۳ برابر یک شده است.

۸ـ لگاریتم اعشاری: اگر مبنای لگاریتم‌را عدد ۱۰ انتخاب کنیم ، لگاریتم‌را اعشاری می‌نامیم .

تذکر ۱: لگاریتم اعشاری از نوع اول است زیرا $b = 10 > 1$

تذکر ۲: تمام قضایای ذکرشده در لگاریتم اعشاری به قوت خود باقی است .

تذکر ۳: در لگاریتم اعشاری از نوشتن مبنای ۱۰ خودداری می‌کنیم .

۹ـ مفسر و مانتیس لگاریتم اعشاری یک عدد .

$$۲۴۷ = ۱۰^{۲/۳۹۲۷} \iff \log ۲۴۷ = ۲/۳۹۲۷$$

$$۰/۰۲۵ = ۱۰^{\bar{۲}/۳۹۷۹} \iff \log ۰/۰۲۵ = \bar{۲}/۳۹۷۹$$

باتوجه به دو مثال‌اخیر ملاحظه می‌کنید که لگاریتم یک‌عدد مثبت معمولا" از دوجزء صحیح و اعشاری تشکیل می‌شود .

جزء صحیح لگاریتم یک عدد مثبت رامفسر لگاریتم می‌نامیم . مثلا" مفسر لگاریتم عدد ۲۴۳ برابر ۲ و مفسر لگاریتم عدد ۰/۰۲۵ برابر ۲ـ است .

مانیتس لگاریتم به موجب قرارداد منفی نیست و از روی جداول‌لگاریتم‌معلوم‌می‌شود .

۱۰ـ طرز تعیین مفسر لگاریتم

الف ـ مفسر لگاریتم اعداد بزرگتر از یک از تعداد ارقام صحیح عدد یک واحد کمتر است .

عدد	۵/۲۷	۱۷	۲۸۶/۱	۳۴۹۲	۴۶۷۹۱/۲۵
مفسر لگاریتم	۰	۱	۲	۳	۴

ب ـ مفسر لگاریتم اعداد کوچکتر از ۱ و بزرگتر از صفر عددی است منفی که قدر مطلق آن یک واحد بیشتر از عده صفرهائی است که بعد از ممیز و سمت چپ عدد نوشته شده باشد .

عدد	۰/۳۲	۰/۰۲۰۵۰	۰/۰۰۷	۰/۰۰۰۴۰۷	۰/۰۰۰۰۱
مفسر لگاریتم	۱ـ	۲ـ	۳ـ	۴ـ	۵ـ

۱۱ـ کلگاریتم یک عدد : قرینهٔ لگاریتم یک عدد را کلگاریتم آن عدد گویند .

$$\text{Cotg } N = -\log N$$

می‌توان گفت کلگاریتم یک عدد برابر است با لگاریتم عکس آن عدد .

$$\text{Cotg } N = \log \frac{1}{N} \qquad \left(\log \frac{1}{N} = \log 1 - \log N = -\log N\right)$$

۱۲ـ طرز تعیین کلگاریتم یک عدد: مفسر CotgN به این ترتیب به دست می‌آید

که بر مفسر logN یک واحد افزوده و علامت آن را تغییر دهیم . برای محاسبه مانیتس Cotg N اولین رقم غیرصفر سمت راست مانیتس logN را از ده و بقیه را از ۹ کم کنیم.

logN	۲/۴۵۷۱	۰/۴۶۹۰	$\bar{۳}$/۹۰۲۸
CotgN	$\bar{۳}$/۵۴۲۹	$\bar{۱}$/۵۳۱۰	۲/۰۹۷۲

توجه کنید : ۲/۴۵۷۱ + $\bar{۳}$/۵۴۲۹ = ۰ log N + Cotg N =0

۱۳ــ قضیه : هرگاه عددی را در یکی‌از قوای صحیح ۱۰ ضرب و یا بر یکی از قوای صحیح۱۰ تقسیم کنیم ، مانیتس لگاریتم آن تغییر نمی‌کند . (اثبات به عهده خوانندگان)

مثلا" چون log2= ۰/۳۰۱۰ بنابراین مانیتس لگاریتم ۲۰ ، ۲۰۰ ، ۲۰۰۰ ، ۰/۲ ، ۰/۰۲ ، ۰/۰۰۲ و . . . نیز ۳۰۱۰ است .

مثال۲۷:اگر log۳۷ = ۱/۵۶۸۲ آنگاه log ۰/۰۰۳۷ برابر است با :

۱) ۳/۵۶۸۲ــ ۲) $\bar{۳}$/۵۶۸۲

۳) $\bar{۲}$/۵۶۸۲ ۴) هیچکدام

جواب : مانیتس لگاریتم ۳۷ و ۰/۰۰۳۷ ه موجب قضیه برابر است . زیرا عدد ۳۷ بر $۱۰^{۴}$= ۱۰۰۰۰ تقسیم شده است و مفسر لگاریتم آن نیز ۳ــ است . بنابراین گزینه (۲) درست است . دقت کنید که چرا گزینه (۱) غلط است :

مانیتس نباید منفی باشد ۳/۵۶۸۲ــ = ۳ــ ــ ۰/۵۶۸۲

مثال۲۸:اگر log x = $\bar{۲}$/۱۴۵ آنگاه $\log\sqrt[3]{x}$ برابر است با :

۱) $\bar{۱}$/۳۸۲ ۲) ۰/۷۱۵ــ

۳) $\bar{۱}$/۸۲۱ ۴) هیچکدام

$$\log\sqrt[3]{x}=\frac{1}{3}\log x \quad \frac{\bar{۲}/۱۴۵}{۳}=\frac{-۲+۰/۱۴۵}{۳}=\frac{-۳+۱/۱۴۵}{۳}=-۱+۰/۳۸۱۶$$

(گرد شده است) $\log\sqrt[3]{x}=\bar{۱}/۳۸۲$

گزینه (۱) درست است .

مثال۲۹: اگر log a = ۱/۴ آنگاه $Cotga^2$ برابر است با :

1) -2/8 2) 3/2 3) $\bar{3}$/2 4) $\bar{2}$/6

$\log a = 1/4 \Rightarrow \text{Cotg}\, a^2 = \bar{2}/6 \Rightarrow \text{Cotg}\, a^2 = 2\text{Cotg}\, a = 2\times\bar{2}/6$

$\text{Cotg}\, a^2 = ۲(-۲ + ۰/۶) = -۴ + ۱/۲ = \bar{۳}/۲$

و گزینه (۳) درست است.

مثال۳۰:حاصل عبارت $S = 2\log 3 + \text{Cotg}\, 36 + 2\log 2$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۷۲

۳) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ۴) ۰

$S = \log 3^2 + \log 2^2 + \text{Cotg}$

$S = \log 3^2 + \log 2^2 + \text{Colog}36 = \log 9 + \log 4 + \text{Colog}36 = \log\frac{9\times 4}{36} = \log 1$

گزینه (۴) درست است.

مثال۳۱:اگر $\log 2 = ۰/۳۰۱۰۳$ آنگاه عدد $۵^{۱۰۰}$ چند رقمی است؟

$\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = ۱ - ۰/۳۰۱۰۳ = ۰/۶۹۸۹۷$

فرض می‌کنیم: $A = ۵^{۱۰۰} \Rightarrow \log A = ۱۰۰\log 5 = ۶۹/۸۹۷$

مفسر لگاریتم A برابر است با ۶۹ پس عدد A هفتاد رقم دارد.

هفتاد رقمی است: $A = ۵^{۱۰۰}$

تمرین: اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱۰$ آنگاه عدد $(\frac{۱}{۲})^{۴۰}$ چند صفر در سمت چپ و بعد از ممیز دارد؟

جواب: ۱۲

مثال۳۲:ثابت کنید $(\frac{۸۶}{۸۵})^{۱۰۰۰} > ۱۰۰۰۰۰$

$\log(\frac{86}{85})^{1000} = 1000\log(\frac{86}{85}) = 1000(\log 86 - \log 85) =$

$۱۰۰(۱/۹۳۴۵ - ۱/۹۲۹۴) = ۱۰۰۰ \times ۰/۰۰۵۱ = ۵/۱$

$\log ۱۰۰۰۰۰ = \log ۱۰^۵ = ۵\log ۱۰ = ۵ \times ۱ = ۵$

$\log(\frac{۸۶}{۸۵})^{۱۰۰۰} > \log ۱۰۰۰۰۰ \Longrightarrow (\frac{۸۶}{۸۵})^{۱۰۰۰} > ۱۰۰۰۰۰$

مثال۳۳:دورهٔ نوسان سادهٔ پاندولی به طول L عبارتست از $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ثانیه.

اگر $g = ۹۸۰$ و $L = ۵۹/۶۳$ باشد ، مطلوبست محاسبه دورهٔ نوسان .

$$\log t = \log \pi + \frac{1}{2} \log L + \frac{1}{2} \operatorname{Cotg} g$$

$\log \pi = \log ۳/۱۴ = ۰/۴۹۷۲$

$\log L = \log ۵۹/۶۳ = ۱/۷۷۵۴$

$\frac{۱}{۲} \log L = ۰/۸۸۷۷$

$\log g = \log ۹۸۰ = ۲/۹۹۱۲$

$\operatorname{Cotg} g = \overline{۳}/۰۰۸۸$

$\frac{۱}{۲} \operatorname{Cotg} g = \frac{\overline{۳}/۰۰۸۸}{۲} =$

$\frac{-۴ + ۱/۰۰۸۸}{۲} =$

$-۲ + ۰/۵۰۴۴ =$

$\overline{۲}/۵۰۴۴$

$\log \pi = ۰/۴۹۷۲$

$\frac{1}{2} \log L = ۰/۸۸۷۷$

$\frac{1}{2} \operatorname{Cotg} g = \overline{۲}/۵۰۴۴$

$\log t = \overline{۱}/۸۸۹۳$

$t = \text{ant} \log \overline{۱}/۸۸۹۳$

$t = ۰/۷۷۵$ ثانیه

تمرینات

۱ــ از عبارات زیر بدون مختصرکردن آنها لگاریتم بگیرید :

$$a^2bc^3 \quad , \quad \frac{1}{2}\sqrt{x^3y} \quad , \quad (a-b)^2(a+b)^3$$

$$\sqrt[5]{\frac{m^3n}{p^4}} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{a^3}{2b^2c}} \quad , \quad \frac{a^{-\frac{3}{4}}b^2}{c^{-\frac{1}{5}}} \quad , \quad \sqrt[3]{a^2b\sqrt{c}}$$

۲ــ حاصل عبارات زیر را با استفاده از لگاریتم به دست آورید .

$$A=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{21\sqrt[3]{6}}} \quad \text{و} \quad B=\sqrt[3]{ac}\cdot\frac{\sqrt[4]{c^3}}{b}\cdot\frac{\sqrt{b^{-1}}}{a^{-\frac{1}{6}}}$$

۳ــ مطلوبست محاسبهٔ $\sqrt[6]{0/08531}$ به کمک لگاریتم .

جواب : ۰/۶۶۱۱

۴ــ اگر $\log(x+z)+\log(x-2y+z)=2\log(x-z)$ آنگاه

$$x^{-1}+z^{-1}=2y^{-1}$$

۵ــ اگر $a^{3-x}b^{5x}=a^{x+5}b^{3x}$ آنگاه $x\log(\frac{b}{a})=\log a$

۶ــ ثابت کنید اگر $a^2+b^2=7ab$ آنگاه $\log\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$

۷ــ ثابت کنید : $(\frac{۲۱}{۲۰})^{۱۰۰}>۱۰۰$

۸ــ هرکدام از اعداد $(\frac{۱}{۲})^{۱۰۰۰}$ و $(\frac{۲}{۳})^{۱۰۰۰}$ چند صفر بین‌ممیز و اولین‌رقم با معنا

دارند؟

۹ـ معادلات زیر را حل کنید:

$$5^{2x} - 5^{x} = 600 \qquad 3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2 \qquad \frac{\log x}{1-\log x} = 2$$

$$\log\sqrt{5x+8} + \frac{1}{2}\log(2x+3) = \log 15$$

$$\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$$

۱۰ـ دستگاههای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 128 \\ xy = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log x + \log y = 7 \\ \log x - \log y = 5 \end{cases}$$

۱۱ـ ثابت کنید: $\dfrac{\log\sqrt{27} + \log\sqrt{8} - \log\sqrt{125}}{\log 6 - \log 5} = \dfrac{3}{2}$

۱۲ـ ثابت کنید: $\log_{\frac{1}{b}} a^{\frac{1}{a}} = \log_b a$

۱۳ـ مطلوبست محاسبه هرکدام از عبارات زیر:

$$2\log\frac{15}{8} - \log\frac{25}{162} + 3\log\frac{4}{9}$$

$$16\log\frac{10}{9} - 4\log\frac{25}{24} - 7\log\frac{80}{81}$$

۱۴ـ x را حساب کنید:

$$\log_{\sqrt[3]{2}}\frac{1}{16} = x \qquad \log_3\sqrt{3}\, x = -\frac{2}{3}$$

$$\log_{0/32}\left(\frac{2}{5}\sqrt{2}\right) = x \qquad \log_x\frac{1}{64} = -4$$

$$\log_{5\sqrt{5}} 125 = x \qquad \log_{2\sqrt{2}} 32\sqrt{4} = x$$

$$\log_{0/001} 0/01 = x \qquad \log_4 0/25 = x$$

۱۵ـ اگر $\log 2 = a$ و $\log 7 = b$ ، مطلوبست محاسبه $\log_8 9/8$

۱۶ـ اگر $\log_{12} 3 = a$ مطلوبست محاسبهٔ $\log_{\sqrt{3}} 8$

۱۷ـ به فرض آنکه $\log 2=b$ و $\log 3=a$ باشد ثابت کنید:

$$\log_5 6 = \frac{a+b}{1-b}$$

۱۸ـ اگر $\log_5 4=a$ و $\log_5 3=b$ ثابت کنید: $\log_{12} 25=\frac{2}{a+b}$

۱۹ـ معادلات زیر را حل کنید:

$$\log_5 [\log_4(\log_3 x)] =0 \quad \text{و} \quad \log_\pi [\log_2(\log_7 x)] =0$$

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2=\log_{4x} 2 \quad \text{و} \quad \log_a \log_b \log_c x =0$$

$$\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x)-2/25=(\log_x \sqrt{5})^2$$

۲۰ـ اگر a و b و c اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ABC ($c = 90^\circ$) باشند ثابت کنید:

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \times \log_{c-b} a$$

و بالعکس.

تست‌های لگاریتم

۱ـ اگر $0 < b < 1$ و $N > 1$ باشد. کدام رابطه درست است؟

۱) $\log_b N > 0$ ۲) $\log_b N < 0$

۳) $\log_b N > 1$ ۴) $\log_b N < 1$

۲ـ اگر داشته باشیم: $N < N' \Leftrightarrow \log_a N > \log_a N'$ کدام گزینه درست است؟

۱) $a > 1$ ۲) $a < 1$

۳) $1 < a < 10$ ۴) $0 < a < 1$

۳ـ $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{8}$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۲ـ

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۴ـ $\log_{\cot g \frac{2\pi}{3}} tg \frac{\pi}{6}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\sqrt{3}$

۳) $-\sqrt{3}$ ۴) تعریف نشده است

۵ـ کدام گزینه درباره تعریف کلگاریتم درست نیست؟

۱) $\text{Cologn} = -\log N$ ۲) $\text{Cologn} = \log \frac{1}{N}$

۳) $\text{Cologn} = \frac{1}{\log N}$ ۴) گزینهٔ (۱) و (۲)

۶ـ اگر $\log x = 0/75$ باشد، خواهیم داشت:

۱) $5 < x < 6$ ۲) $6 < x < 7$

۳) $x > ۶$ ۴) هیچکدام

۷ـ اگر نماد $[\log x]$ به‌معنی جزء صحیح $\log x$ در نظر گرفته شود، از تساوی $\log_{۲}[\log x] = ۲$ کدام گزینه به‌دست می‌کید؟

۱) $۱۰ \leqslant x < ۱۰^{۲}$ ۲) $۱۰^{۲} \leqslant x < ۱۰^{۳}$

۳) $۱۰^{۳} \leqslant x < ۱۰^{۴}$ ۴) $۱۰^{۴} \leqslant x < ۱۰^{۵}$

۸ـ اگر $\log ۲ = ۰/۳$ باشد آنگاه $\log ۲/۵$ برابر است با

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۴

۳) ۱/۶ ۴) ۱/۴

۹ـ مفسر لگاریتم عدد ۱۷ در مبنای ۲ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۰ـ چند عدد صحیح وجود دارد که مفسر لگاریتم آنها در مبنای ۷ برابر ۳ است؟

۱) ۲۵۰۸ ۲) ۲۰۸۵

۳) ۲۰۵۸ ۴) ۲۸۰۵

۱۱ـ اگر $\log ۲۰۰ = ۲/۳۰۱$ آنگاه $۸^{۱۰}$ چند رقمی است؟

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۲ـ اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ آنگاه در عدد $(\frac{۱}{۲})^{۱۰۰۰}$ بعد از ممیز تا اولین رقم‌غیرصفر چند صفروجوددارد؟

۱) ۳۰۰ ۲) ۳۰۱

۳) ۳۰۲ ۴) هیچکدام

۱۳ـ اگر $\log a = \bar{۸}/۷۴۳۹$ ، آنگاه $\sqrt[۳]{a}$ بین کدام دو عدد واقع است؟

۱) $۱۰^{-۴}$ و $۱۰^{-۶}$ ۲) $۱۰^{-۵}$ و $۱۰^{-۶}$

۳) $۱۰^{-۳}$ و $۱۰^{-۴}$ ۴) $۱۰^{-۲}$ و $۱۰^{-۳}$

۱۴ـ اگر $\text{Cologx} = ۲/۸۱۲۲$، آنگاه $\log\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $\bar{۲}/۵۹۳۹$ ۲) $\bar{۱}/۴۰۶۱$

۳) $\bar{۲}/۳۹۵۹$ ۴) $\bar{۱}/۵۹۳۹$

۱۵ـ اگر $x > ۰$ و $x \neq ۱$ و $A = \log_{۶} ۲ + \log_{۶} ۱۸ + \text{Colog}_{x} \sqrt[۳]{x}$ باشد A کدام است؟

۱) $۲ - x$ ۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $۱ + x$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۱۶ـ حاصل عبارت $\log \frac{۱}{۲} + \log \frac{۲}{۳} + \log \frac{۳}{۴} + \cdots + \log \frac{n}{n+1}$ برابر است با

۱) $\log n$ ۲) $\log(n+1)$

۳) Cologn ۴) $\text{Colog}(n+1)$

۱۷ـ $\log_{۵} |\text{Sinx}|$ با فرض $(x \neq k\pi, k \in z)$

۱) همواره مثبت است ۲) همواره منفی است

۳) گاهی مثبت و گاهی صفر است ۴) گاهی منفی و گاهی صفر است

۱۸ـ اگر $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه $\log\text{Cos}^{۲}x$ همواره برابر است با

۱) $2\log\text{Cosx}$ ۲) $2|\log\text{Cosx}|$

۳) $2\log\text{Cos}|x|$ ۴) $2\log|\text{Cosx}|$

۱۹ـ حاصل عبارت $A = \log_{۵} \sqrt[۵]{۱۲۵} + \log_{۳} \sqrt[۵]{۳} - \log_{۳} \frac{۱}{۳}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\frac{۹}{۵}$

۳) $-\frac{۱}{۵}$ ۴) ۳

۲۰ـ اگر $\log_{۳} ۲۱ = a$ آنگاه $\log_{۷} ۲۷$ برابر است با:

۱) $\frac{۷}{۳}a$ ۲) $\frac{۳}{a-۱}$

۳) $\frac{۳a}{a-۱}$ ۴) $\frac{۱}{۳(a-۱)}$

۲۱ـ اگر $\log_{۵} ۴ = a$ و $\log_{۵} ۳ = b$ آنگاه $\log_{۲۵} ۱۲$ برابر است با :

۱) ab ۲) $a + b$

۳) $\frac{1}{2}(a+b)$ ۴) $\frac{۲}{a+b}$

۲۲ـ اگر $\log_{۳} ۲ = m$ و $\log_{۳} ۵ = n$ آنگاه $\log_{۴} ۱۰$ کدام است ؟

۱) $\frac{m+n}{2m}$ ۲) $\frac{m+n}{2n}$

۳) $\frac{m+n}{m}$ ۴) $\frac{m+n}{n}$

۲۳ـ اگر $\log_a^x = ۲$ و $\log_b^x = ۳$ و $\log_c^x = ۶$ باشد آنگاه $\log_{abc} x$ برابر است با

۱) ۶ ۲) ۳

۳) ۱ ۴) ۱۱

۲۴ـ حاصل عبارت $(\log_{۶} ۲)^۲ + (\log_{۶} ۱۲) \cdot (\log_{۶} ۳)$ برابر است با

۱) ۳ ۲) ۱

۳) ۴ ۴) ۶

۲۵ـ حاصل عبارت $\log \text{Cotg } 1^\circ + \log \text{cotg } 2^\circ + \log \text{Cotg } 3^\circ + \ldots + \log \text{Cotg } 89^\circ$

برابر است با

۱) ۱ ۲) صفر

۳) $\text{tg } ۱^\circ$ ۴) $\text{tg } ۸۹^\circ$

۲۶ـ حاصل عبارت $\frac{1}{\log_a \sqrt{ab}} + \frac{1}{\log_b \sqrt{ab}}$ کدام است ؟ $(a.b \neq 1, b > 0, a > 0)$

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) -۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۷ـ اگر a و b و c سه عدد مثبت بوده و داشته باشیم $abc = ۱۰$ در این صورت حاصل عبارت

$\log a^2b + \log b^2c + \log c^2a$ برابر است با

۱) ۱ ۲) ۳

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) صفر

۲۸ـ از تساوی $\log_y^x = \log_x^y$ کدام یک از گزینه‌های زیر همواره نتیجه می‌شده؟

۱) $x = y$ ۲) $x = -y$

۳) $x = +y$ ۴) $x = y$ یا $xy = 1$

۲۹ـ اگر $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ باشد، $(a > 0$ و $b > 0)$ آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $a^2 + b^2 = 9ab$ ۲) $a^2 + b^2 = 11ab$

۳) $a^2 + b^2 = 7ab$ ۴) $a^2 + b^2 = 5ab$

۳۰ حاصل کسر $\frac{\log\sqrt{27} + \log\sqrt{8} - \log\sqrt{125}}{\log 6 - \log 5}$ برابر است با

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۳

۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) -3

۳۱ـ $4(\log_a^b + \log_a^c)$ برابر است با:

۱) $4bc$ ۲) a^4b^4

۳) a^4c^4 ۴) b^4c^4

۳۲ـ $5^{\log_5 \log_5^2}$ برابر است با:

۱) ۵ ۲) ۲

۳) ۳۲ ۴) ۲۵

۳۳ـ با فرض $(a > 1)$ حاصل عبارت $\frac{\log(\log a)}{a^{\log a}}$ برابر است با:

۱) a ۲) $\log a$

۳) $\operatorname{colog} a$ ۴) $(\log a)^2$

۳۴ـ اگر $x > 1$ باشد حاصل $x^{\frac{\log 3 + \log(\log x)}{\log x}}$ برابر است با:

۱) $\log 3x$ ۲) $\frac{1}{3}\log x$

۳) $3\log x$ ۴) $\log \frac{x}{3}$

۳۵ـ اگر $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - x - 1 = 0$ باشند، حاصل‌کسر $\frac{\log a^2b^2}{\log a^2 \log b^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲

۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

۳۶ـ اگر $\log_a^6 = x$ و $\log_a^3 = y$ باشد، $\log_a (\frac{a}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\log_2^a$ ۲) $1 + \log_a^2$

۳) $1 - x + y$ ۴) $x + y + 1$

۳۷ـ اگر $a.b = 10$ باشد، ماکزیمم $\log a \cdot \log b$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۳۸ـ اگر $\log a + \log b = 2$ باشد، آنگاه $(a + 2b)^2$ همواره:

۱) از ۶۰۰ کوچک‌تر نیست ۲) از ۷۰۰ کوچک‌تر نیست

۳) از ۸۰۰ کوچک‌تر نیست ۴) از ۹۰۰ کوچک‌تر نیست

۳۹ـ اگر $\log a = b$ باشد $a^{\log x}$ برابر است با:

۱) x^b ۲) b^x

۳) bx ۴) $\frac{x}{b}$

۴۰ـ عدد ما به‌ازاء $1 + \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5}$ (Antilogaritme) کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

۳) $\sqrt{5}$ ۴) -1

۴۱ـ اگر $x^a = y^b = (xy)^{ab}$ باشد آنگاه کدام‌گزیز درست است؟

۱) $a-b=1$ ۲) $a+b=1$

۳) $ab=1$ ۴) $a=b$

۴۲ـ حاصل $-\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\cdots\sqrt{2}}}}}_{n\text{مرتبه}}$ برابر است با :

۱) n ۲) $-n$

۳) $\frac{1}{n}$ ۴) $-\frac{1}{n}$

۴۳ـ اگر $a^{3-x} \cdot b^{5x} = a^{x+5} \cdot b^{3x}$ باشد ، آنگاه :

۱) $x \log(\frac{a}{b}) = \log b$ ۲) $x \log(\frac{b}{a}) = \log a$

۳) $x \log(\frac{a}{b}) = \log a$ ۴) $x \log(\frac{a}{b}) = \log b$

۴۴ـ معادله $x^{\log x - 1} = 100$ چند جواب دارد ؟

۱) یک جواب ۲) دو جواب

۳) سه جواب ۴) جواب ندارد

۴۵ـ در معادله $3^{\log x} + x^{\log 3} - 162$ مقدار x برابر است با

۱) ۱۰ ۲) ۱۰۰

۳) ۱۰۰۰ ۴) ۱۰۰۰۰

۴۶ـ یکی از ریشه‌های معادلی $(\log_x \sqrt{5})^2 - \log_x^5 \sqrt{5} + 1/25 = 0$ برابر است با

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\frac{1}{5}$

۳) $\sqrt[5]{5}$ ۴) ۲۵

۴۷ـ به‌ازاء چه مقادیری از a معادله $x^2 - 2x + \log(a+1) = 0$ دارای ریشه حقیقی است ؟

۱) $a \leqslant 9$ ۲) $-1 < a < 10$

۳) $-1 \leqslant a \leqslant 9$ ۴) $-1 < a \leqslant 9$

۴۸ـ اگر $f(x) = \log_2^x$ باشد ، از معادلهٔ $fff(x) = 0$ مقدار x برابر است با

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

۴۹ـ دامنه تعریف تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{2}} x)$ کدام است؟

۱) $]0, 1[$ ۲) $]\frac{1}{2}, 1[$
۳) $]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[$ ۴) هیچکدام

۵۰ـ اگر $0 < a < 1$ باشد، کدام یک از روابط زیر صحیح است؟

۱) $\log_2 a > \log_3 a$ ۲) $\log_a^2 < \log_a^3$
۳) $\log_a > \log_a^3$

۵۱ـ اگر $\log_b^a + \log_c^a = 2\log_b^a . \log_c^a$ باشد آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $b^2 = ac$ ۲) $2a = b+c$
۳) $2b = a+c$ ۴) $a^2 = bc$

۵۲ـ اگر $\sqrt{\log_3 (x-2)} > 1$ باشد، آنگاه باید داشته باشیم:

۱) $x > 2$ ۲) $x > 3$
۳) $x > 5$ ۴) $x \geqslant 5$

۵۳ـ اگر $\log_b^a$ و $\log_a^b$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - (m+1)x + m^2 - 3 = 0$ باشد m برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۲-
۳) ± 2 ۴) هیچکدام

۵۴ـ مجموعه جواب نامعادله $(\frac{2}{3})^{\log(2x-3)} > 1$ کدام است

۱) $]\frac{3}{2}, 2[$ ۲) $]-\infty, 2[$
۳) $]2, +\infty[$ ۴) $]\frac{3}{2}, 2[$

۵۵ـ نامساوی $10^{\log 3x} + 10^{\log 4x} > 12x$

۱) به‌ازاء جمیع مقادیر x درست است
۲) به‌ازاء جمیع مقادیر منفی x درست است
۳) به‌ازاء جمیع مقادیر مثبت x درست است
۴) هیچگاه درست نیست

۵۶ـ جواب معادلهٔ $2\log 2 + \log(x^2-1) + \operatorname{Colog}(4x-1) = 0$ برابر است با:

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۵۷ـ اگر $a=\log_c^b$ و $b=\log_a^c$ و $C=\log_b^a$ باشد. abc برابر است با

۱) ۱ ۲) ۱−

۳) ۳ ۴) ۳−

۵۸ ـ جواب معادلـه $\log_a\left\{1+\log_b\left[1+\log_c\left(1+\log_d^x\right)\right]\right\}=0$ برابـر است با

۱) ab ۲) bc

۳) abcd ۴) 1

۵۹ ـ معادله $\log_2^x+\log_4^x+\log_{16}^x=7$ چند جواب دارد؟

۱) یک جواب ۲) دو جواب

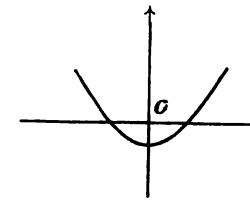
۳) سه جواب ۴) چهار جواب

۶۰ـ اگر $\log \operatorname{Sin}\frac{x}{2}=a$ باشد، $\log(3-4\operatorname{Cos}x+\operatorname{Cos}2x)$ کدام است؟

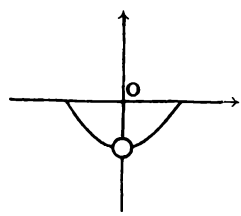
۱) $3\log 2-4a$ ۲) $4a-3\log 2$

۳) $4a+3\log 2$ ۴) $4a+2\log 3$

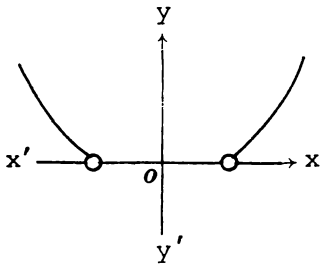
۶۱ـ نمودار تابع $\log y=\log(x^2-1)$ چگونه است؟



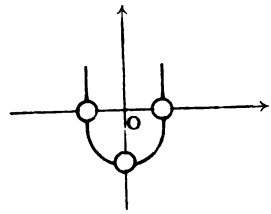
۱)



۲)



۴)



۳)

۶۲ـ تساوی $\log(x^2-4) = \log(x+2) + \log(x-2)$:

۱) به‌ازاء هر مقدار حقیقی x برقرار است

۲) به‌ازاء $x > -2$ برقرار است

۳) به‌ازاء $x > 2$ برقرار است

۴) به‌ازاء $x > -2$ برقرار است

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	پاسخ تشریحی تست‌های لگاریتم
۱	۲	لگاریتم نوع دوم است . به‌عنوان مثال $\log_{\frac{1}{3}}^{3} = -1$
۲	۴	اگر از طرفین یک نامساوی در مبنای $0 < a < 1$ ، لگاریتم بگیریم ، جهت نامساوی تغییر می‌کند .
۳	۲	$\log_{2\sqrt{2}}^{\frac{1}{8}} = y \Leftrightarrow \frac{1}{8} = (2\sqrt{2})^{y} \Rightarrow 2^{-3} = 2^{\frac{3}{2}y} \Rightarrow y = -2$
۴	۴	زیرا $\mathrm{Cotg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ و مبنای لگاریتم منفی اختیار نمی‌شود .
۵	۳	
۶	۱	$\log x = 0/75 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{3}{4}} \quad \sqrt[4]{1000} \quad 5 < \sqrt[4]{1000} < 6$
۷	۴	$[\log x]$ به معنای قسمت صحیح $\log x$ است و قسمت صحیح $\log x$ را مفسر لگاریتم می‌نماییم $\log_{2}[\log x] = 2 \Leftrightarrow [\log x] = 2^{2} = 4 \Rightarrow 10^{4} \leqslant x < 10^{5}$
۸	۲	$\log 2/5 = \log\frac{10}{4} = \log 10 - \log 4 = 1 - 2\log 2 = 1 - 0/6 = 0/4$
۹	۴	$2^{4} < 17 < 2^{5} \Leftrightarrow 4 < \log_{2} 17 < 5 \Rightarrow [\log_{2} 17] = 4$
۱۰	۳	$x \in N$ و $7^{3} \leqslant x < 7^{4} \Rightarrow 7^{4} - 7^{3} - 2058$ چرا؟ دقت کنید .
۱۱	۳	$\log 200 = 2/301 \Rightarrow \log 2 = 0/301$ چرا؟ $A = 8^{10} = 2^{30} \Rightarrow \log A = 30\log 2 = 9/030 \Rightarrow$ A عددی صحیح و ده رقمی است . چرا؟
۱۲	۱	$A = (\frac{1}{2})^{1000} = \log A = 1000 \log\frac{1}{2} = -301$ $[\log A] =$ مفسر $= -301 \Rightarrow$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
		۳۰۰ صفر بین ممیز و اولین رقم نیز صفر در A موجود است .
۱۳	۴	$\log\sqrt[3]{a}=\frac{۱}{۳}\log a=\frac{\bar{۸}/۷۴۳۹}{۳}=\frac{-۹+۱/۷۴۳۹}{۳}=\bar{۳}/۵۸۱۳$ $-۳ < \log a < -۲ \Rightarrow ۱۰^{-3} < a < ۱۰^{-2}$
۱۴	۱	$\text{Colog}x=۲/۸۱۲۲ \Rightarrow \text{Colog}\sqrt{x}=\frac{۱}{۲}\text{Colog}x=۱/۴۰۶۱$ $\Rightarrow \log\sqrt{x}=\bar{۲}/۵۹۳۹$
۱۵	۲	$A=\log_6^2+\log_6^{18}+\text{Colog}_x\sqrt[3]{x}=\log_6^{36}-\frac{۱}{۳}\log_x^x=۲-\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۳}$
۱۶	۴	$\log\frac{۱}{۲}+\log\frac{۲}{۳}+\log\frac{۳}{۴}+\ldots\ldots+\log\frac{n}{n+۱}$ $=\log\left(\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۳}{۴}\ \ldots\ldots\ \frac{n}{n+۱}\right)$ $=\log\frac{۱}{n+۱}=\text{Colog}(n+۱)$
۱۷	۴	$\lvert\text{Sin}\,x\rvert\leqslant ۱ \Rightarrow \log_5\lvert\text{Sin}\,x\rvert\leqslant\log_5^1 \Rightarrow \log_5\lvert\text{Sin}\,x\rvert\leqslant ۰$
۱۸	۴	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\lvert\text{Cos}\,x\rvert>۰$ با توجه به‌اینکه اعداد منفی لگاریتم ندارند .
۱۹	۲	$A=\log_5\sqrt[5]{125}+\log_3\sqrt[5]{۳}-\log_3\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{۵}\log_5^5+\frac{۱}{۵}\log_3^3-(-۱)$ $=\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۵}+۱=\frac{۹}{۵}$
۲۰	۴	$\log_3^{21}=\log_3^{3\times 7}=\log_3^3+\log_3^7=۱+\log_3^7=a$ $=\log_3^7=a-۱$ $\log_7^{27}=\frac{۱}{۳}\log_7^3=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{\log_3^7}=\frac{۱}{۳(a-۱)}$

	گزینهٔ درست	شمارهٔ تست
$\log_5^4 + \log_5^3 = \log_5^{12} \Rightarrow \log_5^{12} = a + b$ $\log_{25}^{۱۲} \log_{5^2}^{۱۲} = ½ \log_5^{۱۲} = ½ (a+b)$	۳	۲۱
$\log_3^{10} = \log_3^2 + \log_3^5 = m+n$ $\log_4^{10} = \frac{\log_3^{10}}{\log_3^4} = \frac{\log_3^{10}}{۲\log_3^2} = \frac{m+n}{۲m}$	۱	۲۲
$\log_{abc} x = \frac{۱}{\log_x abc} = \frac{۱}{\log_x^b + \log_x^b + \log_x^c} = \frac{۱}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = ۱$	۳	۲۳
$(\log_6^3).(\log_6^{12}) + (\log_6^2)^2 = (\log_6^3)+(\log_6^3 + ۲\log_6^2) + (\log_6^2)^2$ $= (\log_6^3)^2 + ۲\log_6^3 \log_6^2 + (\log_6^2)^2 = (\log_6^3 + \log_6^2)^2 = (\log_6^6)^2 = ۱$	۲	۲۴
$Cotg ۸۹ = tg ۱ , Cotg ۸۸ = tg ۲ , ...$ $\log Cotg ۱ + \log Cotg ۲ + ... + \log Cotg ۸۸ + \log Cotg ۸۹ =$ $\log Cotg ۱ Cotg ۲ ... Cotg ۸۸ Cotg ۸۹ =$ $\log [(tg ۱ Cotg ۱) (tg ۲ Cotg ۲) .....(tg ۴۴ Cotg ۴۴).Cotg ۴۵] = \log ۱$ $= 0$	۲	۲۵
$\frac{۱}{\log_{a\sqrt{ab}}} + \frac{۱}{\log_b^{\sqrt{ab}}} = \log_{\sqrt{ab}} a + \log_{\sqrt{ab}} b = \log_{\sqrt{ab}} ab = ۲$	۱	۲۶
$\log a^2 b + \log b^2 c + \log c^2 a = \log a^3 b^3 c^3 = ۳ \log abc = ۳ \log ۱۰ = ۳$	۲	۲۷
$\log_y^x = \log_x^y \Rightarrow \log_b^x = \frac{۱}{\log_y^x} \Rightarrow (\log_y^x)^2 = ۱ \Rightarrow$	۴	۲۸

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
		$\log_b^x = \pm ۱ \begin{cases} \log_y^x = ۱ \Rightarrow x = y \\ \log_y^x = ۱ \Rightarrow xy = ۱ \end{cases}$
۲۹	۳	$\log \frac{a+b}{۳} = \frac{۱}{۲}(\log a + \log b) \Rightarrow ۲ \log \frac{a+b}{۳} = \log ab$ $\log (\frac{a+b}{۳})^2 = \log ab \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{۹} = ab \Rightarrow a^2 + b^2 = ۷ab$
۳۰	۱	$\frac{\log\sqrt{27} + \log\sqrt{8} - \log\sqrt{125}}{\log 6 - \log 5} = \frac{\frac{3}{2}\log 3 + \frac{3}{2}\log 2 - \frac{3}{2}\log 5}{\log 6 - \log 5} =$ $\frac{\frac{3}{2}(\log 3 + \log 2 - \log 5)}{\log\frac{6}{5}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\log\frac{6}{5}}{\log\frac{6}{5}} = \frac{3}{2}$
۳۱	۴	$4(\log_a^b + \log_a^c) = a^{4(\log_a bc)} = [a^{\log_a bc}]^4 = (bc)^4 = b^4 c^4$
۳۲	۱	می‌دانیم که $a^{\log_a N} = N$ بنابراین: و در نتیجه: $5^{\log_5(\log_5^2)} = \log_5^2$ $5^{\log_5(\log_5^2)} = 5^{\log_5^2} = ۲$
۳۳	۲	بنابر قضیهٔ $\frac{\log a}{\log b} = \log_b^a$ داریم: $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}} = a^{\log_a(\log^a)}$ و بنابر رابطهٔ $a^{\log_a^N} = N$ داریم $a^{\log_a(\log a)} = \log a$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
		سئوال : چرا شرط $a>1$ در مساله منظور شده است ؟
۳۴	۳	$x^{\frac{\log 3+\log(\log x)}{\log x}} = x^{\frac{\log(3\log x)}{\log x}} = x^{\log_x(3\log x)} = 3\log x$
۳۵	۳	$x^2 - x - 1 = 0 \begin{cases} S = \log a + \log b = 1 \\ P = \log a.\log b = -1 \end{cases}$ $\frac{\log a^2.b^2}{\log a^2.\log b^2} = \frac{2(\log a+\log b)}{4\log a\log b} = \frac{2(1)}{4(-1)} = -\frac{1}{2}$
۳۶	۳	$\log_a^2 + \log_a^3 = \log_a^6 \Rightarrow \log_a^2 + y = x \Rightarrow \log_a^2 = x - y$ $\log_a(\frac{a}{2}) = \log_a^a - \log_a^2 = 1-(x-y) = 1-x+y$
۳۷	۱	قضیه : هرگاه مجموع دو عدد حقیقی مثبت مقداری ثابت باشد حاصلضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که آن اعداد با هم برابرباشند اثبات : دو عدد را x و y گرفته ، داریم $x+y=S=cte$ باتوجه به اتحاد : $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$ داریم : $xy=\frac{1}{4}(x+y)^2-\frac{1}{4}(x-y)^2$ $xy=\frac{1}{4}S^2-\frac{1}{4}(x-y)^2$ (۱) با توجه به رابطه (۱) ماکزیمم xy مادامی است که $x-y=0$ و یا $x=y$ گردد . $\text{Max}\, xy = \frac{1}{4}S^2$ توجه‌کنید : این قضیه برای بیش از دو عدد مثبت نیز درست است $ab=10 \Rightarrow \log(ab)=\log 10 \Rightarrow \log a+\log b=1=cte$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
		$\text{Max}(\log a.\log b) \Leftrightarrow \log a = \log b = \frac{۱}{۲}$ $\text{Max}(\log a.\log b) = \frac{۱}{۴}$
۳۸	۳	قضیه : هرگاه حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی مثبت مقداری ثابت باشد ، مجموع آنها وقتی می‌نیمم است که آن اعداد با هم برابر باشند . اثبات : دو عدد را x و y گرفته ، داریم : $xy = p = cte$ با توجه به اتحاد $(x+y)^2-(x-y)^2=۴xy$ داریم : (۱) $(x+y)^2=۴p+(x-y)^2$ با توجه به رابطه (۱) می‌نیمم $x+y$ مادامی است که $x-y=0$ و یا $x=y$ گردد . توجه‌کنید : این قضیه برای بیش از دو عدد مثبت نیز درست است . $\log a + \log b = ۲ \Rightarrow \log ab = \log 100 \Rightarrow ab = 100 \Rightarrow$ $a.(۲b) = 200 = cte$ بنابراین $\min(a+۲b) \Leftrightarrow a = ۲b = \sqrt{۲۰۰}$ $\min(a+۲b)^2 = (\sqrt{200}+\sqrt{200})^2 = 800 \Rightarrow (a+۲b)^2 \geqslant ۸۰۰$
۳۹	۱	$\log a = b \Leftrightarrow a = ۱۰^b$ $a^{\log x} = (۱۰^b)^{\log x} = (۱۰^{\log x})^b = x^b$
۴۰	۲	$\log_{\sqrt{5}} N = ۱ + \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5} = \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5} = \log_{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow N = \frac{\sqrt{5}}{5}$
۴۱	۲	$x^a = y^b = (xy)^{ab} \Rightarrow \log x^a = \log y^b = \log (xy)^{ab}$ $\Rightarrow a \log x = b \log y = ab(\log x + \log y)$ $\begin{cases} \log x = b(\log x + \log y) \\ a \log x = b \log y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = b \log x + b \log y \\ a \log x = b \log y \end{cases} \Rightarrow$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
۴۲	۱	از حذف $b \log y$ بین دو رابطه داریم : $\log x = b \log x + a \log x$ و در نتیجه $a + b = 1$ $-\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ مرتبه}} = -\log_2 \log_2 (2^{2^{\frac{1}{n}}}) =$ $-\log_2 (\frac{1}{2^n}) = -(-n) = n$ نتیجه جالب : عر عدد طبیعی مانند n را می‌توانیم به‌صورت لگاریتم بنویسیم به‌عنوان مثال : $5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$
۴۳	۲	$a^{3-x} . b^{5x} = a^{x+5} . b^{3x} \Rightarrow b^{2x} = a^{2x+2} \Rightarrow b^x = a^{x+1} \Rightarrow$ $(\frac{b}{a})^x = a \Rightarrow x \log (\frac{b}{a}) = \log a$
۴۴	۲	$x^{\log x - 1} = 100 \Rightarrow \frac{x^{\log x}}{x} = 100 \Rightarrow x^{\log x} = 100x$ اگر از طریفین رابطهٔ اخیر در مبنای ۱۰ لگاریتم بگیریم و قرار داد کنیم : $(\log x)^2 = \log^2 x$ خواهیم داشت : $\log^2 x - \log x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log x = 2 \Rightarrow x = 100 \\ \log x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10} \end{cases}$
۴۵	۴	می‌دانیم که : $M^{\log_a N} = N^{\log_a M}$ لذا : $(3^{\log x} = x^{\log 3})$ و در نتیجه $3^{\log x} + x^{\log 3} = 162 \Rightarrow 2 \times 3^{\log x} = 162 \Rightarrow 3^{\log x} = 3^4$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
		$\Rightarrow \log x = ۴ \quad \Rightarrow x = ۱۰۰۰۰$
۴۶	۳	$(\log_x \sqrt{5})^2 - \log_x 5\sqrt{5} + ۱٫۲۵ = ۰ \quad \Rightarrow$
		$\frac{۱}{۴}\log_x^2 ۵ - \frac{۳}{۲}\log_x ۵ + \frac{۵}{۴} = ۰ \quad \Rightarrow \log_x^2 ۵ - ۶\log_x ۵ + ۵ = ۰$
		$\log_x^5 = ۱ \Rightarrow x = ۵ \quad , \log_x^5 = ۵ \Leftarrow \Rightarrow x = \sqrt[5]{5}$
۴۷	۴	$x^2 - ۲x + \log(a+۱) = ۰$
		$\begin{cases} a+۱ > ۰ \Rightarrow a > -۱ \\ \Delta' = ۱ - \log(a+۱) \geqslant ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -۱ \\ \log(a+۱) \leqslant ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -۱ \\ a+۱ \leqslant ۱۰ \end{cases}$
		$\begin{cases} a > -۱ \\ a \leqslant ۹ \end{cases} \Rightarrow -1 < a \leqslant ۹$
۴۸	۲	$fff(x) = o \Rightarrow \log_2[\log_2(\log_2 x)] = o \Rightarrow [\log_2(\log_2 x)] = ۱$
		$\Rightarrow (\log_2 x) = ۲ \Rightarrow x = ۴$
		با آزمایش جواب‌ها هم به‌نتیجه می‌رسیم .
۴۹	۱	$f(x) = \log_{½}(\log_{½} x)$
		باید دو شرط $\begin{cases} x > 0 \\ \log_{½} x > 0 \end{cases}$ تواما" برقرار باشد . چرا؟
		$\begin{cases} x > o \\ \log_{½} x > \log_{½} ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > o \\ x < ۱ \end{cases} \Rightarrow D_f =]\,o, 1\,[$
۵۰	۳	اگر از طرفین نامساوی $۲ < ۳$ در مبنای $۰ < a < ۱$ لگاریتم بگیریم جهت نامساوی عوض می‌شود و خواهیم داشت : $\log_a^2 > \log_a^3$
		نادرست بودن سایر گزینه‌ها را به‌دقت بررسی کنید .

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
۵۱	۴	$\log_b^a + \log_c^a = 2\log_b^a . \log_c^a \Rightarrow$ $\frac{1}{\log_a^b} + \frac{1}{\log_a^c} = \frac{2}{\log_a^b . \log_a^c} \Rightarrow \log_a^c + \log_a^b = 2 \Rightarrow$ $\log_a^{bc} = 2 \Rightarrow bc = a^2$
۵۲	۳	$\sqrt{\log_3(x-2)} > 1$ اولا" باید داشته باشیم : $\begin{cases} x-2>0 \\ \log_3(x-2) \geqslant 1 \end{cases}$ ثانیا" اگر طرفین نامساوی راکه مثبت هستند مجذورکنیم جهت نامساوی عوض نمی‌شود و داریم $\log_3(x-2) > 1$ بنابراین کافی است داشته باشیم $\begin{cases} x-2>0 \\ \log_3^{x-2} > 1 \end{cases}$ چرا؟ و از آنجا $x > 5$
۵۳	۱	می‌دانیم که $(\log_b^a . \log_a^b = 1)$ بنابراین در معادله درجه دوم $x^2 - (x+1)x + m^2 - 3 = 0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر یک است . $\frac{c}{a} = m^2 - 3 = 1 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$ به‌ازاء $m=2$ معادله دارای دو ریشه حقیقی بوده که عکس یکدیگرند و به ازاء $m=-2$ معادله ریشه حقیقی ندارد . نکتهٔ مهم : اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه حقیقی عکس یکدیگر باشد ، شرط $\frac{c}{a} = 1$ لازم است اما کافی نیست . $\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow x'$ و x'' عکس یکدیگر باشند x' و x' حقیقی و عکس یکدیگرند $\not\Rightarrow \frac{c}{a} = 1$
۵۴	۴	برای آنکه $(\frac{2}{3})^{\log(2x-3)} < 1$ باید داشته باشیم : $\begin{cases} 2x-3>0 \\ \log(2x-3) < \log 1 \end{cases} \Rightarrow$ چرا؟ $\begin{cases} 2x-3>0 \\ \log(2x-3) < 0 \end{cases}$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
		$\begin{cases} x > \frac{۳}{۲} \\ x < ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{۲} < x < ۲ \qquad x \in]\frac{۳}{۲} \text{ و } ۲[$
۵۵	۴	$10^{\log 3x} + 10^{\log 4x} > 12x$ اولا" باید داشته باشیم $x > o$ چرا؟ ثانیا" می‌دانیم که: $10^{\log 3x} = 3x$ ، $10^{\log 4x} = 4x$ چرا؟ پس $3x + 4x > 12x \Rightarrow -5x > o \Rightarrow x < o$ و این شرط با قسمت اولا" سازگار نیست.
۵۶	۲	$2\log 2 + \log(x^2 - 1) + \text{Colog}(4x - 1) = o$ حوزهٔ مجهول معادله را تعیین می‌کنیم: $\begin{matrix} x^2 - 1 > o \\ 4x - 1 > o \end{matrix} \Rightarrow x > 1$ چرا؟ و چون "حوزه مجهول ⊂ مجموعه جواب"، پس گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) نادرست هستند و لابدگزینه (۲) جوابست به‌عنوان تمرین، معادله را حل کرده و جواب آن‌را تعیین کنید.
۵۷	۱	$a = \log_c^b , b = \log_a^c , c = \log_b^a$ اگر طرفین تساوی‌های فوق را در هم ضرب‌کنیم، خواهیم داشت: $abc = \log_c^b . \log_a^c . \log_b^a = \frac{\log b}{\log c} . \frac{\log c}{\log a} . \frac{\log a}{\log b} . = 1$
۵۸	۴	مانند تست شمارهٔ ۴۸ حل کنید عبارت داخل آکولاد برابر یک است. چرا؟ در نتیجه عبارت‌داخل کروشه‌نیز برابر یک می‌شود. وازآنجا عبارت داخل پرانتز نیز برابر یک شده و $x = ۱$ نتیجه می‌شود.
۵۹	۱	$\log_{16}^x + \log^x + \log_2^x = ۷$

شمارهٔ تست	گزینهٔ درست	
		$\log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = ۷$ $¼ \log_2 x + ½ \log_2 x + \log_2 x = ۷ \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16$
۶۰	۳	$\log \text{Sin} \frac{x}{۲} = a \Rightarrow \log(3 - 4\cos x + \cos 2x) =$ $\log(3 - 4\cos x + 2\cos x - 1) = \log 2(1 - \cos x)^2$ $= \log 8 \text{Sin}^4 \frac{x}{2} =$ $\log 8 + 4 \log \text{Sin} \frac{x}{۲} = 3 \log 2 + 4a$
۶۱	۴	$\log y = \log(x^2 - 1)$ باید داشته باشیم $\begin{cases} y > o \\ x^2 - 1 > o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > o \\ x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$ پس آن قسمت از سهمی $y = x^2 - 1$ قبولست که مختصات نقاطش در شرائط فوق صدق کند و گزینه (۴) جواب است.
۶۲	۳	$\log(x^2 - 4) = \log(x + 2) + \log(x - 2)$ برای درستی این رابطه باید سه شرط: $\begin{cases} x^2 - 4 > o \\ x + 2 > o \\ x - 2 > o \end{cases}$ توام برقرار باشد و از حل این دستگاه نامعادلات خواهیم داشت $x > 2$

کتابخانه مجازی ریاضیات

از سری کتاب‌های سازمان آموزشی و انتشاراتی علوی
خیابان انقلاب، مقابل دانشگاه تهران، ساختمان ظروفچی تلفن ۶۴۰۷۵۱۳

قیمت ۲۵۰ تومان